COMPTE RENDU

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 8 AOUT 1842.

PRÉSIDENCE DE M. PONCELET.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le Président annonce que l'Académie tiendra sa prochaine séance le mardi 16 août, le lundi 15 étant le jour de l'Assomption, l'une des fêtes conservées.

M. le Président donne communication d'une lettre de M. *Larrey* fils, qui annonce que les obsèques de feu M. le baron Larrey, membre de la Section de Médecine et de Chirurgie, auront lieu le jeudi 11 de ce mois.

Sur la puissance dispersive de l'atmosphère; Remarques de M. Arago.

« La Note *sur la réfraction astronomique* lue à l'Académie, le 1er août, par l'illustre astronome de Kœnigsberg, renferme ce passage :

« Une des causes de la confusion des images que les étoiles présentent » dans les lunettes peut être soumise au calcul : c'est la dispersion de la » lumière dans l'atmosphère. Son existence est bien connue des astronomes, » qui souvent voient près de l'horizon les étoiles présenter des spectres pris-

» matiques, suffisamment étendus pour être bien vus quand les oscillations » ordinaires ne sont pas trop grandes. *Mais personne, que je sache, » n'ayant mesuré la grandeur de ces spectres, le rapport entre la réfraction » et la dispersion dans l'air atmosphérique paraît être encore inconnu.* »

» M. Bessel n'était pas exactement informé quand il écrivait ces lignes. M. Arago rappelle, en effet, les diverses circonstances dans lesquelles il a entretenu publiquement l'Académie de ses *mesures de la dispersion de l'atmosphère*. Les premiers résultats que M. Arago ait obtenus à ce sujet remontent au 12 septembre 1812. Depuis, d'autres observateurs ont également étudié la question. M. Arago a rédigé une Note historique où toutes ces recherches sont analysées et appréciées. Il se propose de la lire à l'Académie et d'y joindre un examen des causes qui ont rendu ses résultats si différents de ceux du célèbre astronome prussien.

« Avoir traité, il y a trente ans, dit M. Arago, un sujet que M. Bessel » vient de trouver digne de ses savantes investigations; avoir précédé un » pareil observateur dans la découverte d'une vérité scientifique, c'est » un double honneur dont tout le monde trouvera naturel que j'aie dé- » siré me prévaloir. »

M. **Arago** annonce qu'il fera, dans une prochaine séance, une communication relative à l'éclipse solaire du 8 juillet.

MÉCANIQUE CÉLESTE.—*Sur l'élimination des nœuds dans le problème des trois corps; par* M. **Jacobi**.

« Les illustres géomètres du siècle passé, en traitant le problème des trois corps, ont cherché le mouvement de deux d'entre eux autour du troisième ou autour du centre de gravité de tous les trois. Mais, en réduisant de cette manière le problème de trois corps qui s'attirent mutuellement à un problème de deux corps qui se meuvent autour d'un point fixe, on fait perdre aux équations différentielles du problème cette forme précieuse dont elles jouissent dans leur état primitif, savoir, que les secondes différentielles des coordonnées soient égalées aux dérivées d'une même fonction. C'est par cette raison que les principes de la conservation des forces vives et des aires cessent d'avoir lieu par rapport aux deux corps. On pourra cependant éviter cet inconvénient en agissant de la manière suivante :

» Supposons, pour plus de généralité, que le système se compose de n corps, du soleil et de $n-1$ planètes. Comme il est permis de supposer que son centre de gravité reste en repos, on aura une équation linéaire

entre chacun des trois systèmes de coordonnées du même nom. Donc les n coordonnées parallèles à un même axe pourront être exprimées linéairement par $n-1$ autres quantités, en établissant $n-1$ équations de condition entre les $n(n-1)$ constantes qui entrent dans ces n expressions linéaires. Comme on peut disposer encore d'un nombre $(n-1)^2$ de constantes, on les déterminera de manière que, dans l'expression de la force vive du système, s'évanouissent les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ produits des différentielles premières des nouvelles variables. En se servant de formules parfaitement semblables pour chaque système de coordonnées du même nom, et en considérant les nouvelles variables comme les coordonnées de $n-1$ autres corps, *on aura réduit de cette manière la force vive du système des n corps proposés à celle d'un système de n — 1 corps,* des masses convenables étant attribuées à ces derniers. Il y aura même dans les formules de réduction un nombre $\frac{n(n-1)}{2}$ de constantes arbitraires et dont on pourra profiter de différentes manières.

» D'après ce qu'on vient de dire, le principe de la conservation des forces vives donnera une équation dans laquelle la somme des forces vives des $n-1$ corps fictifs sera égalée à une fonction de leurs coordonnées. En se servant des règles générales de Lagrange, on en déduira, par de simples différentiations partielles, les équations différentielles du problème réduit, et l'on reconnaîtra aisément que la conservation des aires a lieu dans le mouvement des $n-1$ corps par lesquels on a remplacé le système proposé. Ces $n-1$ corps ne s'écartent d'ailleurs des $n-1$ planètes que de petites quantités de l'ordre des forces perturbatrices, de manière que la première approximation peut être la même pour les uns et pour les autres. Le changement que, dans cette analyse, doit subir l'expression de la force perturbatrice n'augmente pas la difficulté de son développement.

» En appliquant la méthode que je viens d'exposer au problème des trois corps, on réduit celui-ci à un problème du mouvement de deux corps qui jouit de propriétés remarquables En effet, les trois équations fournies par la conservation des aires font voir :

» 1°. Que l'intersection commune des plans des orbites des deux corps reste constamment dans un plan fixe : c'est le plan invariable du système ;

» 2°. Que les inclinaisons des plans des deux orbites à ce plan fixe et les paramètres de ces orbites regardés comme des ellipses variables, sont quatre éléments, dont deux quelconques déterminent rigoureusement les deux autres.

» Choisissons pour variables du problème les inclinaisons des deux orbites au plan invariable, les deux rayons vecteurs, les angles qu'ils forment avec l'intersection commune des plans des deux orbites, enfin l'angle que forme cette intersection située, comme on a vu, dans le plan invariable, avec une droite fixe de ce plan. On trouvera *que ce dernier angle disparaît entièrement du système des équations différentielles et se détermine après leur intégration par une quadrature*. Donc, dans cette nouvelle forme des équations différentielles n'entre aucune trace des nœuds. Les six équations différentielles du second ordre, qui expriment le mouvement relatif des trois corps, s'y trouvent réduites à cinq équations du premier ordre et une seule du second. Par suite, l'on a fait cinq intégrations. Les intégrales connues n'étant qu'au nombre de quatre, on pourra donc dire que l'on a fait une intégration de plus dans le système du monde. Je dis dans le système du monde, puisque la même méthode s'applique à un nombre quelconque de corps.

ANALYSE.

» 1. Soient m la masse du Soleil, m_1 et m_2 celles des deux planètes; soient ξ, υ, ζ; $\xi_1, \upsilon_1, \zeta_1$; $\xi_2, \upsilon_2, \zeta_2$ les coordonnées rectangulaires des trois corps m, m_1, m_2, rapportées à leur centre de gravité. Comme on a les trois équations

$$(1)\qquad \begin{cases} m\xi + m_1\xi_1 + m_2\xi_2 = 0, \\ m\upsilon + m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = 0, \\ m\zeta + m_1\zeta_1 + m_2\zeta_2 = 0, \end{cases}$$

il sera permis de faire

$$(2)\qquad \begin{cases} \xi = \alpha x + \beta x_1, & \upsilon = \alpha y + \beta y_1, & \zeta = \alpha z + \beta z_1, \\ \xi_1 = \alpha_1 x + \beta_1 x_1, & \upsilon_1 = \alpha_1 y + \beta_1 y_1, & \zeta_1 = \alpha_1 z + \beta_1 z_1, \\ \xi_2 = \alpha_2 x + \beta_2 x_1, & \upsilon_2 = \alpha_2 y + \beta_2 y_1, & \zeta_2 = \alpha_2 z + \beta_2 z_1, \end{cases}$$

les six constantes α, β, etc., devant satisfaire aux deux conditions

$$(3)\qquad \begin{cases} m\alpha + m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 = 0, \\ m\beta + m_1\beta_1 + m_2\beta_2 = 0. \end{cases}$$

Supposons de plus que, par les substitutions (2), la somme des forces vives

du système 2 T se change en cette expression

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} 2T = \mu\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] \\ + \mu_1\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right], \end{aligned} \right.$$

on aura les trois équations

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu &= m\alpha\alpha + m_1\alpha_1\alpha_1 + m_2\alpha_2\alpha_2, \\ \mu_1 &= m\beta\beta + m_1\beta_1\beta_1 + m_2\beta_2\beta_2, \\ 0 &= m\alpha\beta + m_1\alpha_1\beta_1 + m_2\alpha_2\beta_2. \end{aligned} \right.$$

J'observe qu'en vertu des formules (3) on peut faire

$$(6) \quad \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = \varepsilon . m, \quad \alpha_2\beta - \alpha\beta_2 = \varepsilon . m_1, \quad \alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = \varepsilon . m_2,$$

ε étant un facteur indéterminé. Des formules (5) et (6) on tire aussi celle-ci :

$$(7) \quad \mu\mu_1 = mm_1m_2(m + m_1 + m_2)\varepsilon\varepsilon.$$

Si l'on fait

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} xx + yy + zz = rr, \quad x_1x_1 + y_1y_1 + z_1z_1 = r_1r_1, \\ xx_1 + yy_1 + zz_1 = rr_1 \cos U, \end{aligned} \right.$$

on aura

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho\rho &= (\xi_1 - \xi_2)^2 + (\upsilon_1 - \upsilon_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2 \\ &= \gamma^2 rr + 2\gamma\delta\, rr_1 \cos U + \delta^2 r_1r_1, \\ \rho_1\rho_1 &= (\xi_2 - \xi)^2 + (\upsilon_2 - \upsilon)^2 + (\zeta_2 - \zeta)^2 \\ &= \gamma_1^2 rr + 2\gamma_1\delta_1 rr_1 \cos U + \delta_1^2 r_1r_1, \\ \rho_2\rho_2 &= (\xi - \xi_1)^2 + (\upsilon - \upsilon_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2 \\ &= \gamma_2^2 rr + 2\gamma_2\delta_2 rr_1 \cos U + \delta_2^2 r_1r_1, \end{aligned} \right.$$

où l'on a mis, pour plus de simplicité,

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma &= \alpha_1 - \alpha_2, & \delta &= \beta_1 - \beta_2, \\ \gamma_1 &= \alpha_2 - \alpha, & \delta_1 &= \beta_2 - \beta, \\ \gamma_2 &= \alpha - \alpha_1, & \delta_2 &= \beta - \beta_1, \end{aligned} \right.$$

ce qui donne

$$(11) \quad \gamma + \gamma_1 + \gamma_2 = 0, \quad \delta + \delta_1 + \delta_2 = 0.$$

Si l'on met

$$U = \frac{m m_1}{\rho_2} + \frac{m m_2}{\rho_1} + \frac{m_1 m_2}{\rho} = \sum \frac{m_1 m_2}{\rho},$$

le principe des forces vives fournit l'équation

$$(12) \qquad T = U - h = \sum \frac{m_1 m_2}{\rho} - h,$$

h étant une constante arbitraire. Or, si dans cette équation l'on substitue les valeurs des quantités T, ρ, ρ_1, ρ_2 tirées des formules (4) et (9), on aura tout de suite, par les règles générales données par Lagrange dans sa *Mécanique analytique*,

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\sum \frac{m_1 m_2 \gamma (\gamma x + \delta x_1)}{\rho^3} = \frac{dU}{dx}, \\ \mu \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\sum \frac{m_1 m_2 \gamma (\gamma y + \delta y_1)}{\rho^3} = \frac{dU}{dy}, \\ \mu \frac{d^2 z}{dt^2} &= -\sum \frac{m_1 m_2 \gamma (\gamma z + \delta z_1)}{\rho^3} = \frac{dU}{dz}, \\ \mu_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -\sum \frac{m_1 m_2 \delta (\gamma x + \delta x_1)}{\rho^3} = \frac{dU}{dx_1}, \\ \mu_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= -\sum \frac{m_1 m_2 \delta (\gamma y + \delta y_1)}{\rho^3} = \frac{dU}{dy_1}, \\ \mu_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= -\sum \frac{m_1 m_2 \delta (\gamma z + \delta z_1)}{\rho^3} = \frac{dU}{dz_1}. \end{aligned} \right.$$

On tire de ces formules les suivantes :

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) &= -\mu_1 \left(y_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} - z_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} \right) \\ &= -(y z_1 - z y_1) \sum \frac{m_1 m_2 \gamma \delta}{\rho^3}, \\ \mu \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - z \frac{d^2 x}{dt^2} \right) &= -\mu_1 \left(z_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} - x_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} \right) \\ &= -(z x_1 - x z_1) \sum \frac{m_1 m_2 \gamma \delta}{\rho^3}, \\ \mu \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) &= -\mu_1 \left(x_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} - y_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} \right) \\ &= -(x y_1 - y x_1) \sum \frac{m_1 m_2 \gamma \delta}{\rho^3}. \end{aligned} \right.$$

Ces équations donnent les trois intégrales

$$(15)\quad \begin{cases} \mu\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)+\mu_1\left(y_1\frac{dz_1}{dt}-z_1\frac{dy_1}{dt}\right)=c, \\ \mu\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)+\mu_1\left(z_1\frac{dx_1}{dt}-x_1\frac{dz_1}{dt}\right)=c_1, \\ \mu\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)+\mu_1\left(x_1\frac{dy_1}{dt}-y_1\frac{dx_1}{dt}\right)=c_2, \end{cases}$$

c, c_1, c_2, étant des constantes arbitraires. Je remarque à cette occasion les formules

$$(16)\quad \begin{cases} \mu\left(y_1\frac{d^2z}{dt^2}-z_1\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\quad(yz_1-zy_1)\sum\frac{mm_1\gamma\gamma}{\rho^3}, \\ \mu_1\left(y\frac{d^2z_1}{dt^2}-z\frac{d^2y_1}{dt^2}\right)=-(yz_1-zy_1)\sum\frac{mm_1\delta\delta}{\rho^3}, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(17)\quad \begin{cases} \mu\mu_1\frac{d\left(y_1\frac{dz}{dt}-z\frac{dy_1}{dt}+y\frac{dz_1}{dt}-z\frac{dy_1}{dt}\right)}{dt} \\ =(yz_1-zy_1)\sum\frac{m_1m_2(\mu_1\gamma\gamma-\mu\delta\delta)}{\rho^3}. \end{cases}$$

On a deux autres systèmes de formules semblables à celui des formules (16) et (17), et qui se rapportent aux coordonnées z et x et aux coordonnées x et y.

» D'après une propriété connue des fonctions homogènes, il suit des formules (13)

$$(18)\quad \left.\begin{matrix} \mu\left(x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}\right) \\ +\mu_1\left(x_1\frac{d^2x_1}{dt^2}+y_1\frac{d^2y_1}{dt^2}+z_1\frac{d^2z_1}{dt^2}\right) \end{matrix}\right\}=-\mathrm{U}.$$

Donc, en faisant usage des formules (4) et (12), on obtient la suivante :

$$(19)\quad \frac{d^2(\mu rr+\mu_1 r_1 r_1)}{dt^2}=2(\mathrm{U}-2h).$$

Les six équations (13) pourront servir à déterminer les six quantités x, y, etc., en fonction du temps. Mais on pourra aussi choisir pour cet effet six autres équations indépendantes entre elles et qui se déduisent des

équations (13) par des combinaisons différentes, par exemple, les quatre équations (12) et (15), une des équations (14) et l'équation (19). En effet, on reviendra sans peine de ces dernières aux équations (13).

» On déterminera α, β, etc., par les quantités γ, δ, etc., au moyen des formules

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} M\alpha &= m_1\gamma_2 - m_2\gamma_1, & M\beta &= m_1\delta_2 - m_2\delta_1, \\ M\alpha_1 &= m_2\gamma - m\gamma_2, & M\beta_1 &= m_2\delta - m\delta_2, \\ M\alpha_2 &= m\gamma_1 - m_1\gamma, & M\beta_2 &= m\delta_1 - m_1\delta, \end{aligned}\right.$$

où $M = m + m_1 + m_2$. Ces formules étant substituées dans (5), on aura,

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} M\mu &= m_1 m_2\gamma\gamma + m_2 m\gamma_1\gamma_1 + mm_1\gamma_2\gamma_2, \\ M\mu_1 &= m_1 m_2\delta\delta + m_2 m\delta_1\delta_1 + mm_1\delta_2\delta_2, \\ 0 &= m_1 m_2\gamma\delta + m_2 m\gamma_1\delta_1 + mm_1\gamma_2\delta_2, \end{aligned}\right.$$

formules analogues aux équations (5).

» **2.** Je veux discuter à présent la grandeur des différentes constantes qui entrent dans les formules précédentes. Ces constantes n'étant pas entièrement déterminées, il s'agira de faire telles suppositions sur leur grandeur respective qui pourront subsister avec les équations de condition établies entre ces constantes et qui permettront en même temps de faire usage des méthodes d'approximation connues.

» Les équations de condition que l'on a établies entre les constantes α, β, etc., sont les suivantes,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &m\alpha + m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 = 0, \\ &m\beta + m_1\beta_1 + m_2\beta_2 = 0, \\ &m\alpha\beta + m_1\alpha_1\beta_1 + m_2\alpha_2\beta_2 = 0; \end{aligned}\right.$$

celles que l'on a entre les six constantes γ, δ, etc., seront

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\gamma + \gamma_1 + \gamma_2 = 0, \\ &\delta + \delta_1 + \delta_1 = 0, \\ &m_1 m_2\gamma\delta + m_2 m\gamma_1\delta_1 + mm_1\gamma_2\delta_2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Les masses des planètes étant très-petites par rapport au Soleil, les fractions $\frac{m_1}{m}$, $\frac{m_2}{m}$ seront des quantités très-petites du premier ordre. Cela posé, les équations (1) font voir qu'il est permis de supposer α_1 et β_2 très-proches de l'unité, pendant que les constantes α, α_1, β, β_1 seront des quantités

du premier ordre. En effet, si l'on fait

$$(3)\qquad \alpha_2 = \frac{m_1 \zeta}{m}, \quad \beta_1 = \frac{m_2 \eta}{m},$$

on tirera des équations (1) les formules approchées,

$$(4)\qquad \begin{cases} \alpha = -\frac{m_1}{m}, & \alpha_1 = 1, \quad 1 + \eta + \zeta = 0; \\ \beta = -\frac{m_2}{m}, & \beta_2 = 1, \end{cases}$$

d'où l'on tire les valeurs approchées correspondantes des quantités γ, δ, etc.,

$$(5)\qquad \begin{cases} \gamma = 1, & \gamma_1 = -\frac{m_1}{m}\eta, \quad \gamma_2 = -1, \\ \delta = -1, & \delta_1 = 1, \quad \delta_2 = \frac{m_2}{m}\zeta. \end{cases}$$

Enfin les quantités μ et μ_1 s'écarteront peu des masses m_1 et m_2. Tous les écarts de ces valeurs approchées avec les véritables valeurs pourront être supposés de l'ordre des forces perturbatrices.

» Il suit des considérations précédentes, que les quantités x, y, z ne s'écarteront de ξ_1, υ_1, ζ_1, et que les quantités x_1, y_1, z_1 ne s'écarteront de ξ_2, υ_2, ζ_2 que de quantités de l'ordre des forces perturbatrices. Donc, si l'on imagine deux corps dont les coordonnées respectives sont x, y, z, et x_1, y_1, z_1, leur mouvement autour du centre de gravité du système des trois corps pourra, en première approximation, être regardé comme elliptique. La même chose aura lieu si le mouvement est rapporté à tout autre point qui ne s'écarte de ce centre que de quantités de l'ordre des forces perturbatrices. En négligeant ces quantités, on déduit des formules (3) et (13) du n° 1 les équations différentielles qui servent à lapremière approximation, et que l'on intégrera par les formules elliptiques connues,

$$(6)\qquad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{mm_1}{\gamma_2\mu}\cdot\frac{x}{r^3}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{mm_1}{\gamma_2\mu}\cdot\frac{y}{r^3}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{mm_1}{\gamma_2\mu}\cdot\frac{z}{r^3}, \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{mm_2}{\delta_1\mu_1}\cdot\frac{x_1}{r_1^3}, \\ \frac{d^2y_1}{dt^2} = -\frac{mm_2}{\delta_1\mu_1}\cdot\frac{y_1}{r_1^3}, \\ \frac{d^2z_1}{dt^2} = -\frac{mm_2}{\delta_1\mu_1}\cdot\frac{z_1}{r_1^3}, \end{cases}$$

où les facteurs $-\frac{m_1}{\gamma_2\mu}$, $\frac{m_2}{\delta_1\mu_1}$ ne s'écartent de l'unité que de quantités du premier ordre par rapport aux forces pertubatrices. Si l'une des deux planètes, par exemple la seconde, est beaucoup plus éloignée du Soleil que l'autre, il conviendra de substituer aux trois dernières de ces équations celles-ci :

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= -\frac{m_2}{\mu_1}\left(\frac{m}{\delta_1}-\frac{m_1}{\delta}\right)\frac{x_1}{r_1^3},\\ \frac{d^2y_1}{dt^2} &= -\frac{m_2}{\mu_1}\left(\frac{m}{\delta_1}-\frac{m_1}{\delta}\right)\frac{y_1}{r_1^3},\\ \frac{d^2z_1}{dt^2} &= -\frac{m_2}{\mu_1}\left(\frac{m}{\delta_1}-\frac{m_1}{\delta}\right)\frac{z_1}{r_1^3}. \end{aligned}\right.$$

Dans les approximations successives l'on pourra laisser indéterminées les quantités μ, μ_1, γ, δ, etc. ; seulement il sera bon de fixer la valeur de la quantité $\frac{\delta}{\gamma}$. Si l'on fait exactement $\gamma=\alpha_1-\alpha_2=1$, $\delta=\beta_1-\beta_2=-1$, on aura

$$(8)\quad \xi_1-\xi_2=x-x_1,\quad \upsilon_1-\upsilon_2=y-y_1,\quad \zeta_1-\zeta_2=z-z_1.$$

Dans ce cas, on peut envisager les quantités x, y, z et x_1, y_1, z_1 comme les coordonnées des deux planètes elles-mêmes, mais rapportées à un autre point que le centre de gravité du système. En effet, on pourra faire, en même temps,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \xi_1&=x+a, & \upsilon_1&=y+b, & \zeta_1&=z+c,\\ \xi_2&=x_1+a, & \upsilon_2&=y_1+b, & \zeta_2&=z_1+c, \end{aligned}\right.$$

a, b, c étant déterminées par les équations

$$(10)\quad a=\alpha_2x+\beta_1x_1,\quad b=\alpha_2y+\beta_1y_1,\quad c=\alpha_2z+\beta_1z_1.$$

Or des équations

$$\xi_1=\alpha_1x+\beta_1x_1,\quad \xi_2=\alpha_2x+\beta_2x_1,$$

on tire

$$\alpha_2\xi_1+\beta_1\xi_2=(\alpha_1+\beta_1)\alpha_2x+(\alpha_2+\beta_2)\beta_1x_1;$$

et comme on a $\alpha_1+\beta_1=\alpha_2+\beta_2$, on aura aussi

$$a=\frac{\alpha_2\xi_1+\beta_1\xi_2}{\alpha_1+\beta_1}.$$

On trouve de la même manière

$$b = \frac{\alpha_2 v_1 + \beta_1 v_2}{\alpha_1 + \beta_1}; \quad c = \frac{\alpha_2 \zeta_1 + \beta_1 \zeta_2}{\alpha_1 + \beta_1}.$$

Si l'on retranche des coordonnées a, ξ_1 et ξ_2 la même quantité

$$\frac{m\xi + m_1\xi_1 + m_2\xi_2}{M},$$

M étant la somme des masses, on trouvera, après quelques réductions, la valeur suivante de a, et de la même manière les valeurs ci-jointes de b et de c,

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{\xi + \gamma_1\xi_1 - \delta_2\xi_2}{1 + \gamma_1 - \delta_2}, \\ b &= \frac{v + \gamma_1 v_1 - \delta_2 v_2}{1 + \gamma_1 - \delta_2}, \\ c &= \frac{\zeta + \gamma_1\zeta_1 - \delta_2\zeta_2}{1 + \gamma_1 - \delta_2}. \end{aligned} \right.$$

Les constantes γ_1 et δ_2 qui entrent dans ces formules pourront être des quantités quelconques remplissant l'équation de condition

$$(12) \quad \left(\gamma_1 - \frac{m_1}{m}\right)\left(\delta_2 + \frac{m_2}{m}\right) = \frac{M}{m}\gamma_1.\delta_2;$$

il sera donc, entre autres, permis de mettre

$$(13) \quad \delta_2 = 0, \quad \gamma_1 = \frac{m_1}{m}, \quad \text{ou} \quad \gamma_1 = 0, \quad \delta_2 = -\frac{m_2}{m}.$$

En supposant toujours

$$\gamma = -\delta = 1,$$

on aura encore

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} &M\alpha = -[(m_1 + m_2)\gamma_1 + m_1], \quad M\beta = (m_1 + m_2)\delta_2 - m_1, \\ &M\alpha_1 = m\gamma_1 + m + m_2, \quad M\beta_1 = -[m\delta_2 + m_2], \\ &M\alpha_2 = m\gamma_1 - m_1, \quad M\beta_2 = -m\delta_2 + m + m_1, \\ &\gamma_2 = -(1 + \gamma_1), \quad \delta_1 = 1 - \delta_2, \\ &\mu = mm_2\gamma_1 \frac{1 + \gamma_1 - \delta_2}{m\delta_2 + m_2} = \frac{m_2(m\gamma_1 - m_1)}{M\delta_2}(1 + \gamma_1 - \delta_2), \\ &\mu_1 = mm_1\delta_2 \frac{1 + \gamma_1 - \delta_2}{m\gamma_1 - m_1} = \frac{m_1(m\delta_2 + m_2)}{M\gamma_1}(1 + \gamma_1 - \delta_2). \end{aligned} \right.$$

Les formules (11) sont indépendantes de l'origine des coordonnées; elles font voir que le point autour duquel on suppose les deux planètes décrire

des orbites elliptiques variables est le centre de gravité des trois corps, si l'on donne respectivement au Soleil, à la première et à la deuxième planète, les masses $1, \gamma_1, -\delta_2$. Si l'on fait $\delta_2 = 0$, ce point deviendra le centre de gravité du Soleil et de la première planète, en leur attribuant leurs masses effectives m et m_1. On aura dans ce cas

$$(15)\quad \left\{ \begin{array}{lll} \alpha = -\dfrac{m_1}{m}, & \alpha_1 = 1, & \alpha_2 = 0, \\ \beta = -\dfrac{m_1}{\mathrm{M}}, & \beta_1 = -\dfrac{m_2}{\mathrm{M}}, & \beta_2 = \dfrac{m + m_1}{\mathrm{M}}, \\ \gamma = 1, & \gamma_1 = \dfrac{m_1}{m}, & \gamma_2 = -\left(1 + \dfrac{m_1}{m}\right), \\ \delta = -1, & \delta_1 = 1, & \delta_2 = 0, \\ \mu = m_1\left(1 + \dfrac{m_1}{m}\right), & & \mu_1 = m_2\,\dfrac{m + m_1}{\mathrm{M}}. \end{array} \right.$$

On voit donc qu'il faudra attribuer aux planètes des masses un peu différentes dont la raison n'est plus $\frac{m_1}{m_2}$, mais $\frac{m_1}{m_2}\frac{\mathrm{M}}{m}$.

» 3. Ayant établi entre les quantités x, y, etc., les équations (6) du n° 2, les corps dont les coordonnées sont x, y, z et x_1, y_1, z_1, décriront autour de l'origine des coordonnées comme foyer des orbites elliptiques. Nommons, par rapport au premier de ces corps,

$2a$ le grand axe de son orbite,
$2p$ le paramètre,
i l'inclinaison du plan de l'orbite à un plan fixe,
Ω la longitude du nœud ascendant du plan de l'orbite sur le plan fixe,

et notons d'un trait les mêmes quantités rapportées au deuxième corps; cela posé, on aura par les formules connues pour le mouvement elliptique d'une planète autour du Soleil,

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} &= k\sqrt{p}\cos i, \\ y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} &= k\sqrt{p}\sin i \sin\Omega, \\ z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} &= -k\sqrt{p}\sin i\cos\Omega, \\ x_1\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dy}{dt} &= k_1\sqrt{p_1}\cos i_1, \\ y_1\frac{dz_1}{dt} - z_1\frac{dy_1}{dt} &= k_1\sqrt{p_1}\sin i_1\sin\Omega_1, \\ z_1\frac{dx_1}{dt} - x_1\frac{dz_1}{dt} &= -k_1\sqrt{p_1}\sin i_1\sin\Omega_1, \end{aligned} \right.$$

où l'on a

$$(2) \qquad kk = -\frac{1}{\gamma_2}\frac{mm_1}{\mu}, \quad k_1k_1 = \frac{1}{\delta_1}\frac{mm_2}{\mu_1},$$

et où pour le plan des x et y est pris le plan fixe, et pour l'axe des x la droite fixe de laquelle les nœuds ascendants sont comptés.

» Pour le véritable mouvement donné par les équations (13) du n° 1, on laisse subsister la forme des expressions elliptiques, en en faisant varier les éléments. Dans cette supposition, *l'on a entre les six éléments troublés $p, i, \Omega, p_1, i_1, \Omega_1$, trois équations au moyen desquelles on exprime immédiatement les trois quantités* $\sqrt{p_1}\cos i_1$, $\sqrt{p_1}\sin i_1 \sin\Omega_1$, $\sqrt{p_1}\sin i_1\cos\Omega_1$, *par les trois autres* $\sqrt{p}\cos i$, $\sqrt{p}\sin i\sin\Omega$, $\sqrt{p}\sin i\cos\Omega$. En effet, en substituant les formules (1) dans les formules (15) du n° 1, l'on trouve entre ces quantités les simples relations suivantes :

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{l} \mu k\sqrt{p}\cos i + \mu_1 k_1\sqrt{p_1}\cos i_1 = c_2; \\ \mu k\sqrt{p}\sin i\sin\Omega + \mu_1 k_1\sqrt{p_1}\sin i_1\sin\Omega_1 = c, \\ \mu k\sqrt{p}\sin i\cos\Omega + \mu_1 k_1\sqrt{p_1}\sin i_1\cos_1\Omega = c_1, \end{array}\right.$$

c, c_1, c_2 étant des constantes arbitraires.

» On sait que l'on peut disposer de la direction des axes des coordonnées de manière à faire évanouir deux des trois constantes c, c_1, c_2. Supposons donc

$$c = 0, \quad c_1 = 0,$$

le plan des x et y sera celui auquel *Laplace* a donné le nom de *plan invariable*. En faisant $c = c_1 = 0$, les équations (3) se changent dans les suivantes,

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{l} \mu k\sqrt{p}\cos i + \mu_1 k_1\sqrt{p_1}\cos i_1 = c_2, \\ \mu k\sqrt{p}\sin i + \mu_1 k_1\sqrt{p_1}\sin i_1 = 0, \\ \qquad\qquad \Omega = \Omega_1. \end{array}\right.$$

» Les deux premières de ces formules font voir *que les inclinaisons des plans des deux orbites au plan invariable sont parfaitement déterminées par les deux paramètres*, et *vice versa*. Nommant $\mathrm{I} = i_1 - i$ l'inclinaison mutuelle des deux plans, on déterminera I par la formule

$$(5) \qquad 4\mu\mu_1 kk_1\sqrt{pp_1}\sin \mathrm{I}^2 = \{\mu k\sqrt{p} + \mu_1 k_1\sqrt{p_1}\}^2 - c,$$

et ensuite on aura i et i_1 eux-mêmes par les formules

$$(6)\qquad \begin{cases} c_2 \sin i_1 = \mu k \sqrt{p} \sin \mathrm{I}, \\ c_2 \sin i = -\mu_1 k_1 \sqrt{p_1} \sin \mathrm{I}. \end{cases}$$

» Il suit de ces formules *que le plan invariable passera constamment entre les plans des deux orbites.* On voit par la troisième des formules (4), que *l'intersection commune des plans des deux orbites se meut dans le plan invariable.* Je remarque que la position du plan d'une orbite est indépendante de la forme que l'on suppose à cet orbite, et qu'elle est entièrement déterminée dès que le centre du mouvement ou l'origine des coordonnées est fixé. En effet, ce plan est celui qui passe, dans chaque moment du temps, par l'origine des coordonnées et par deux positions consécutives de la planète.

» 4. L'intersection commune des plans des deux orbites tournant autour du centre des coordonnées dans un plan fixe dans l'espace, et que l'on prendra pour celui des x et y, il paraît naturel de prendre pour variables,

Les deux rayons vecteurs.............................. r et r_1,
Leurs distances au nœud ascendant commun des plans des deux orbites.. v et v_1,
Les inclinaisons de ces plans au plan invariable............ i et i_1,
La longitude du nœud ascendant commun des deux plans ou sa distance à l'axe des x.............................. Ω.

Par les formules connues de la trigonométrie sphérique, on aura

$$(1)\qquad \begin{cases} x = r(\cos\Omega \cos v - \sin\Omega \cos i \sin v), \\ y = r(\sin\Omega \cos v + \cos\Omega \cos i \sin v), \\ z = r \sin i \sin v, \\ x_1 = r_1(\cos\Omega \cos v_1 - \sin\Omega \cos i_1 \sin v_1), \\ y_1 = r_1(\sin\Omega \cos v_1 + \cos\Omega \cos i_1 \sin v_1), \\ z_1 = r_1 \sin i_1 \sin v_1. \end{cases}$$

Nommons δv l'angle de deux rayons vecteurs consécutifs de la première planète fictive; comme dans le plan de l'orbite d'une planète se trouve aussi sa position consécutive, on tirera des formules (1) les deux systèmes de formules

$$(2)\qquad \begin{cases} d\,\dfrac{x}{r} = -(\cos\Omega \sin v + \sin\Omega \cos i \cos v)\delta v = \mathrm{A}\delta v, \\ d\,\dfrac{y}{r} = -(\sin\Omega \sin v - \cos\Omega \cos i \cos v)\delta v = \mathrm{B}\delta v, \\ d\,\dfrac{z}{r} = \sin i \cos v \delta v = \mathrm{C}\delta v; \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} d\,\dfrac{x}{r} = \mathrm{A}\,dv + \mathrm{A}'\,di - \dfrac{y}{r}\,d\Omega\,, \\ d\,\dfrac{y}{r} = \mathrm{B}\,dv + \mathrm{B}'\,di + \dfrac{x}{r}\,d\Omega\,, \\ d\,\dfrac{z}{r} = \mathrm{C}\,dv + \mathrm{C}'\,di\,, \end{cases}$$

en faisant

$$(4)\quad \begin{cases} \mathrm{A}' = \quad \sin\Omega \sin i \sin v, \\ \mathrm{B}' = -\cos\Omega \sin i \sin v, \\ \mathrm{C}' = \quad \cos i \sin v. \end{cases}$$

Il suit des formules (2) et (3),

$$(5)\quad \begin{cases} 0 = \mathrm{A}(dv - \delta v) + \mathrm{A}'di - \dfrac{y}{r}\,d\Omega, \\ 0 = \mathrm{B}(dv - \delta v) + \mathrm{B}'di + \dfrac{x}{r}\,d\Omega\,, \\ 0 = \mathrm{C}(dv - \delta v) + \mathrm{C}'di. \end{cases}$$

On tire des formules (1), (2) et (4)

$$(6)\quad \begin{cases} \cos\Omega.\mathrm{A} + \sin\Omega.\mathrm{B} = -\sin v, \\ \cos\Omega.\mathrm{A}' + \sin\Omega.\mathrm{B}' = 0, \\ -\cos\Omega.y + \sin\Omega.x = -r\cos i \sin v. \end{cases}$$

On aura donc, d'après les formules (5),

$$(7)\quad \begin{cases} \delta v - dv = \cos i\,d\Omega = \operatorname{tang} v.\dfrac{di}{\operatorname{tang} i}\,, \\ d\Omega = \operatorname{tang} v.\dfrac{di}{\sin i}. \end{cases}$$

La formule

$$\delta v - dv = \cos i\,d\Omega$$

peut être déduite aisément de la considération d'un triangle sphérique formé par les côtés

$$d\Omega,\quad v + \delta v,\quad v + dv.$$

» Soient

$$(8)\quad \begin{cases} \cos\Omega = n\cos p, & \sin\Omega = n'\cos p', \\ \cos i\sin\Omega = n\sin p, & \cos i\sin\Omega = n'\sin p', \end{cases}$$

on aura

$$(9)\quad \begin{cases} x = r.n\cos(v+p), & y = r.n'\cos(v-p'), \\ d.\frac{x}{r} = -n\sin(v+p)\delta v, & d.\frac{y}{r} = -n'\sin(v-p')\delta v. \end{cases}$$

Il s'ensuit de ces formules,

$$xd.\frac{y}{r} - yd.\frac{x}{r} = r\,nn'\sin(p+p')\delta v,$$

$$yd.\frac{z}{r} - zd.\frac{y}{r} = r\sin i.n'\cos p'.\delta v,$$

$$zd.\frac{x}{r} - xd.\frac{z}{r} = -r\sin i.n\cos p.\delta v,$$

ou, en substituant les formules (8),

$$(10)\quad \begin{cases} xdy - ydx = rr\cos i.\delta v, \\ ydz - zdy = rr\sin\Omega\sin i.\delta v, \\ zdx - xdz = -rr\cos\Omega\sin i.\delta v. \end{cases}$$

Ajoutant les carrés de ces équations, on a, d'après des formules connues,

$$rr(dx^2 + dy^2 + dz^2 - dr^2) = r^4\delta v^2,$$

ou

$$(11)\quad dxdx + dydy + dzdz = drdr + rr\delta v\delta v.$$

Pour avoir des formules semblables par rapport à la deuxième des planètes fictives, on n'a qu'à ajouter un trait à chaque lettre dans les formules (2), (10) et (11), pourvu qu'on nomme dv_1 l'angle que forment ses deux rayons vecteurs consécutifs. Donc, puisqu'on a $\Omega_1 = \Omega$, il viendra, d'après la seconde des formules (7),

$$(12)\quad \tang v.\frac{di}{\sin i} = \tang v_1.\frac{di_1}{\sin i_1}.$$

Mettant $c = c_1 = 0$ dans les formules (15), n° 1, et substituant les for-

mules (10), ainsi que leurs semblables relatives à la deuxième planète, on a

$$(13) \quad \begin{cases} \mu rr\cos i.\delta v + \mu_1 r_1 r_1 \cos i_1.\delta v_1 = c_2 dt, \\ \mu rr\sin i.\delta v + \mu_1 r_1 r_1 \sin i_1.\delta v_1 = 0. \end{cases}$$

De ces formules on tire les valeurs suivantes de δv et de δv_1;

$$(14) \quad \begin{cases} \delta v = dv + \operatorname{tang} u \dfrac{di}{\operatorname{tang} i} = \dfrac{c_2 \sin i}{\mu rr \sin \mathrm{I}} dt, \\ \delta v_1 = dv_1 + \operatorname{tang} v_1 \dfrac{di_1}{\operatorname{tang} i_1} = -\dfrac{c_2 \sin i}{\mu_1 r_1 r_1 \sin \mathrm{I}} dt, \end{cases}$$

où, comme ci-dessus, on a fait $\mathrm{I} = i_1 - i$. Substituant la première de ces formules dans la première des formules (10), il vient

$$(15) \quad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \frac{c_2 \sin i_1 \cos i}{\mu \sin \mathrm{I}}.$$

La différentielle de cette quantité sera égale à

$$-\frac{c_2}{\mu}\cdot\frac{\sin i_1^2 \cos i^2}{\sin \mathrm{I}^2} d. \frac{\sin \mathrm{I}}{\sin i_1 \cos i} = \frac{c_2}{\mu}\cdot\frac{\sin i_1^2 \cos i^2}{\sin \mathrm{I}^2} d.\operatorname{tang} i\, c.\operatorname{tang} i_1;$$

on aura donc

$$(16) \quad x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{c_2}{\mu \sin \mathrm{I}^2}\left(\sin i_1 \cos i_1 \frac{di}{dt} - \sin i \cos i \frac{di_1}{dt}\right).$$

On tire encore des formules (11) et (14) la suivante

$$(17) \quad \cos i_1 dv - \cos i dv_1 = \frac{c_2}{\sin \mathrm{I}}\left(\frac{\sin i_1 \cos i_1}{\mu rr} + \frac{\sin i \cos i}{\mu_1 r_1 r_1}\right) dt.$$

L'expression de la force vive du système est fournie par la formule (4), n° 1, et par les formules (11) et (14) données ci-dessus,

$$(18) \quad \begin{cases} 2\mathrm{T} = \mu\left[rr\left(\dfrac{\delta v}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{\delta r}{dt}\right)^2\right] + \mu_1\left[r_1 r_1\left(\dfrac{\delta v_1}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{\delta r_1}{dt}\right)^2\right] \\ \qquad = \dfrac{c_2^2}{\sin \mathrm{I}^2}\left(\dfrac{\sin i_1^2}{\mu rr} + \dfrac{\sin i^2}{\mu_1 r_1 r_1}\right) + \mu\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 + \mu_1\left(\dfrac{dr_1}{dt}\right)^2. \end{cases}$$

Les formules (12) et (19), n° 1, donnent

$$(19)\quad \begin{cases} 2T = 2U - 2h, \\ \mu r \dfrac{d^2r}{dt^2} + \mu_1 r_1 \dfrac{d^2r_1}{dt^2} + \mu\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 + \mu_1\left(\dfrac{dr_1}{dt}\right)^2 = U - 2h, \end{cases}$$

d'où vient

$$(20)\quad \begin{cases} \mu\left[2r\dfrac{d^2r}{dt^2} + \left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2\right] + \mu_1\left[2r_1\dfrac{d^2r_1}{dt^2} + \left(\dfrac{dr_1}{dt}\right)^2\right] \\ \qquad - \dfrac{c_2^2}{\sin I^2}\left[\dfrac{\sin i_1^2}{\mu rr} + \dfrac{\sin i^2}{\mu_1 r_1 r_1}\right] + 2h = 0. \end{cases}$$

Remarquons encore la formule qui dérive des formules (1),

$$(21)\quad xy_1 - yx_1 = rr_1(\cos i_1 \sin v_1 \cos v - \cos i \sin v \cos v_1).$$

Des formules (12) et (16) on tire

$$(22)\quad \begin{cases} x\dfrac{d^2y}{dt^2} - y\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{c_2 \sin i_1}{\mu \cos v \sin v_1 \sin I^2}(\cos i_1 \sin v_1 \cos v - \cos i \sin v \cos v_1)\dfrac{di}{dt} \\ \qquad = \dfrac{c_2 \sin i_1 (xy_1 - yx_1)}{\mu \cos v \sin v_1 \sin I^2 rr_1}\dfrac{di}{dt}. \end{cases}$$

Substituant cette formule dans la dernière des formules (14), n° 1, il vient

$$(23)\quad \frac{c_2 \sin i_1}{\cos v \sin v_1 \sin I^2 rr_1}\frac{di}{dt} = -\left(\frac{mm_1\gamma_2\delta_2}{\rho_2^3} + \frac{mm_1\gamma_1\delta_1}{\rho_1^3} + \frac{m_1m_2\gamma\delta}{\rho^3}\right).$$

Comme on a, d'après les formules (11) et (14),

$$(24)\quad xd^2x + yd^2y + zd^2z = \tfrac{1}{2}d^2.rr - (drdr + rr\delta v^2) = rd^2r - c_2^2\frac{\sin i_1^2}{\mu^2 r^2 \sin I^2}dt^2,$$

il suit des formules (13), n° 1,

$$(25)\quad \begin{cases} \mu\dfrac{d^2r}{dt^2} = \dfrac{c_2c_2}{\mu}\cdot\dfrac{\sin i_1^2}{\sin I^2 r^3} - \dfrac{mm_1\gamma_2(\gamma_2 r + \delta_2 r_1 \cos U)}{\rho_2^3} \\ \qquad - \dfrac{mm_2\gamma_1(\gamma_1 r + \delta_1 r_1 \cos U)}{\rho_1^3} - \dfrac{m_1m_2\gamma(\gamma r + \delta r_1 \cos U)}{\rho^3}. \end{cases}$$

Des formules (18) et (25) on peut déduire la suivante

$$(26)\quad \frac{c_2^2}{\mu rr}d.\frac{\sin i_1^2}{\sin I^2} + \frac{c_2^2}{\mu_1 r_1 r_1}d.\frac{\sin^2 i^2}{\sin I^2} = 4rr_1 \sin U dU\left(\frac{mm_1\gamma_2\delta_2}{\rho_2^3} + \frac{mm_2\gamma_1\delta_1}{\rho_1^3} + \frac{m_1m_2\gamma\delta}{\rho^3}\right).$$

On obtient aussi la valeur de dU en observant que, dans l'équation

$$\cos U = \cos v \cos v_1 + \cos I \sin v \sin v_1,$$

on peut mettre en même temps $U + dU$, $v + \delta v$, $v_1 + \delta v_1$ au lieu de U, v, v_1, ce qui donne

$$(27)\left\{\begin{aligned} \sin U dU = (&\sin v \cos v_1 - \cos I \cos v \sin v_1)\delta v \\ &+ (\cos v \sin v_1 - \cos I \sin v \cos v_1)\delta v_1. \end{aligned}\right.$$

Si, dans le triangle sphérique formé par les côtés U, v, v_1, on nomme φ et φ_1 les angles opposés aux côtés v et v_1, on a

$$(28) \qquad dU = \cos\varphi\,\delta v + \cos\varphi_1\,\delta v_1,$$

formule qui fournit l'interprétation géométrique de la formule (27).

» Les formules (14), (23) et (27) pourront servir à vérifier la formule (26).

» 5. Entre les six quantités

$$r,\ r_1;\quad v,\ v_1;\quad i,\ i_1$$

et le temps t, on a, d'après les formules (12), (14), (19), (23) du précédent article, les équations suivantes qui pourront servir à développer ces quantités en fonctions du temps.

Équations différentielles du problème des trois corps.

I. $$\tang v \frac{di}{\sin i} = \tang v_1 . \frac{di_1}{\sin i_1},$$

II. $$\tang v \frac{di}{\tang i} + dv = \frac{c_2}{\mu} . \frac{\sin i_1}{\sin I} \frac{dt}{rr},$$

III. $$\tang v \frac{di_1}{\tang i_1} + dv_1 = \frac{c_2}{\mu_1} . \frac{\sin i}{\sin I} \frac{dt}{r_1 r_1},$$

IV. $$\frac{c_2 \sin i_1}{\cos v \sin v_1 \sin I^2 rr_1} di = -\left(\frac{mm_1\gamma_2\delta_2}{\rho_2^3} + \frac{mm_2\gamma_1\delta_1}{\rho_1^3} + \frac{m_1 m_2 \gamma\delta}{\rho^3}\right) dt,$$

V. $$\frac{c_2^2}{\sin I^2}\left(\frac{\sin i_1^2}{\mu rr} + \frac{\sin i^2}{\mu_1 r_1 r_1}\right) + \mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \mu_1\left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2 = 2U - 2h,$$

VI. $$\frac{d^2(\mu rr + \mu_1 r_1 r_1)}{dt^2} = 2U - 4h.$$

On a mis dans ces formules

$$(1)\quad \begin{cases} U = \dfrac{mm_1}{\rho_2} + \dfrac{mm_2}{\rho_1} + \dfrac{m_1m_2}{\rho}, \\ \rho\rho = \gamma\gamma rr + 2\gamma\delta rr_1 \cos U + \delta\delta r_1r_1, \\ \rho_1\rho_1 = \gamma_1\gamma_1 rr + 2\gamma_1\delta_1 rr_1 \cos U + \delta_1\delta_1 r_1r_1, \\ \rho_2\rho_2 = \gamma_2\gamma_2 rr + 2\gamma_2\delta_2 rr_1 \cos U + \delta_2\delta_2 r_1r_1, \\ \cos U = \cos v \cos v_1 + \cos I \sin v \sin v_1. \end{cases}$$

Entre les six constantes γ, δ, etc., on a les équations de condition

$$(2)\quad \begin{cases} \gamma + \gamma_1 + \gamma_2 = 0, \\ \delta + \delta_1 + \delta_2 = 0, \\ m_1m_2\gamma\delta + m_2m\gamma_1\delta_1 + mm_1\gamma_2\delta_2 = 0, \end{cases}$$

où m, m_1, m_2 sont les masses du Soleil et des deux planètes. Donc trois des constantes γ, δ, etc., pourront être prises à l'arbitraire. Les quantités μ et μ_1 sont déterminées par les formules

$$(3)\quad \begin{cases} M\mu = m_1m_2\gamma\gamma + m_2m\gamma_1\gamma_1 + mm_1\gamma_2\gamma_2, \\ M\mu_1 = m_1m_2\delta\delta + m_2m\delta_1\delta_1 + mm_1\delta_2\delta_2, \end{cases}$$

M étant la somme des trois masses.

» Après avoir intégré complétement le système des six équations (I à VI), on a encore à déterminer l'angle Ω au moyen de la formule

$$\text{VII.}\qquad d\Omega = \operatorname{tang} v \cdot \frac{di}{\sin i},$$

ce qui se fait par une simple quadrature. On formera ensuite les six quantités

$$(4)\quad \begin{cases} x = r(\cos\Omega\cos v - \sin\Omega\cos i \sin v), & x_1 = r_1(\cos\Omega\cos v_1 - \sin\Omega\cos i_1 \sin v_1), \\ y = r(\sin\Omega\cos v + \cos\Omega\cos i \sin v), & y_1 = r_1(\sin\Omega\cos v_1 + \cos\Omega\cos i_1 \sin v_1), \\ z = r\sin i \sin v, & z_1 = r_1 \sin i_1 \sin v_1, \end{cases}$$

et les six constantes

$$(5)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{m_1\gamma_2 - m_2\gamma_1}{M}, & \beta = \dfrac{m_1\delta_2 - m_2\delta_1}{M}, \\ \alpha_1 = \dfrac{m_2\gamma - m\gamma_2}{M}, & \beta_1 = \dfrac{m_2\delta - m\delta_2}{M}, \\ \alpha_2 = \dfrac{m\gamma_1 - m_1\gamma}{M}, & \beta_2 = \dfrac{m\delta_1 - m_1\delta}{M}, \end{cases}$$

après quoi on aura les coordonnées rectangulaires du Soleil et des deux planètes, rapportées à leur centre de gravité, le plan invariable étant pris pour celui des x et y,

$$(6)\begin{cases}\xi = \alpha x + \beta x_1, & \xi_1 = \alpha_1 x + \beta_1 x_1, & \xi_2 = \alpha_2 x + \beta_2 x_1,\\ \upsilon = \alpha y + \beta y_1, & \upsilon_1 = \alpha_1 y + \beta_1 y_1, & \upsilon_2 = \alpha_2 y + \beta_2 y_1,\\ \zeta = \alpha z + \beta z_1, & \zeta_1 = \alpha_1 z + \beta_1 z_1, & \zeta_2 = \alpha_2 z + \beta_2 z_1.\end{cases}$$

Voilà donc le problème des trois corps réduit à l'intégration des six équations (I à VI) et à une quadrature. *Les six équations différentielles* (I à VI) *sont toutes du premier degré, hors une seule qui est du second, et il n'y entre aucune trace des nœuds.* »

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Théorie nouvelle des mouvements planétaires, ou application du calcul des résidus à l'astronomie; par* M. AUGUSTIN CAUCHY.

« Les beaux Mémoires de Lagrange, de Laplace et de Poisson, sur la variation des constantes arbitraires, ont réduit la détermination des mouvements planétaires à l'intégration d'équations différentielles qui renferment, avec le temps et les éléments de chaque orbite, les dérivées partielles d'une fonction perturbatrice, prises par rapport à ces mêmes éléments. La question étant ramenée à ce point, les perfectionnements ultérieurs de l'analyse appliquée à l'astronomie, et la simplicité plus ou moins grande des calculs à l'aide desquels on obtiendra, par des approximations successives, des valeurs plus ou moins exactes des éléments, dépendront surtout de la forme assignée au développement de la fonction perturbatrice. Or, après avoir de nouveau réfléchi sur ce sujet, j'ai acquis la conviction que les formes de développement jusqu'ici adoptées par les géomètres n'étaient pas celles qui se prêtaient le mieux à des approximations rapides; et j'ajouterai que, même après les modifications que j'ai fait subir dans plusieurs Mémoires aux formes dont il s'agit, elles laissaient encore beaucoup à désirer sous le double rapport de la simplicité des résultats et de l'économie de temps. Le présent Mémoire a pour objet une nouvelle forme de développement qui, sous l'un et l'autre rapport, offre des avantages importants et inespérés. Entrons à cet égard dans quelques détails.

» Un théorème du calcul des résidus sert à exprimer en termes finis une

intégrale dans laquelle la fonction sous le signe $\int$ est une fonction rationnelle, souvent même une fonction transcendante d'une exponentielle trigonométrique, lorsque cette intégrale est prise entre deux limites de l'argument dont la première se réduit à zéro, la seconde à une circonférence entière. Suivant un autre théorème, si, après avoir multiplié, dans une semblable intégrale, l'exponentielle trigonométrique par un module quelconque, l'on fait varier ce module, la valeur de l'intégrale restera invariable, tant que la fonction sous le signe $\int$ ne cessera pas d'être une fonction continue de l'argument. Or ces deux théorèmes fournissent, en astronomie, pour le développement de la fonction perturbatrice relative à chaque planète, une méthode digne de remarque et que je vais indiquer en peu de mots.

» On sait que, dans chaque fonction perturbatrice, les termes dont les développements se calculent avec le plus de peine sont les termes réciproquement proportionnels aux distances mutuelles des planètes. Ainsi, dans la question qui nous occupe, il s'agit principalement de développer en série convergente la première puissance négative de la distance effective entre deux planètes. Or Euler a donné un moyen fort simple de développer cette puissance en une série de cosinus des multiples de la distance apparente. Ce moyen consiste à décomposer la distance effective, élevée à la puissance du degré -1, en deux facteurs imaginaires, puis à multiplier l'un par l'autre les développements de ces deux facteurs. Après cette multiplication, le coefficient de chaque cosinus se trouve représenté par une série dont la somme peut être convertie en une intégrale définie dans laquelle la différentielle de la distance apparente se trouve divisée par la distance effective. Si, dans une semblable intégrale, on remplace successivement la distance mutuelle entre deux planètes par chacune de ses puissances entières et positives, puis les distances de deux planètes au soleil par deux nombres égaux, le premier à l'unité, le second au rapport des grands axes des deux orbites; si enfin on joint aux intégrales ainsi formées leurs dérivées relatives au second des deux nombres, on obtiendra la série triple des transcendantes généralement introduites dans le développement de la fonction perturbatrice. Le calcul direct de la plupart de ces transcendantes était à peu près impraticable, et, même avec les formules nouvelles que l'auteur de la *Mécanique céleste* avait construites sur la demande de M. Bouvard, le calcul était encore très-long et très-pénible, comme le faisait observer un jour notre honorable confrère. Cette difficulté, qui a engagé M. Le Verrier à donner, pour la détermination des

transcendantes dont il s'agit, de nouvelles méthodes de calcul, n'existe pas lorsqu'on adopte pour la fonction perturbatrice la forme de développement que je propose; et je vais en dire la raison. Les deux facteurs imaginaires dans lesquels se décompose la première puissance négative de la distance mutuelle entre deux planètes offrent des modules égaux, et chacun de ces facteurs, représenté par un binôme élevé à une puissance dont le degré est $-\frac{1}{2}$, peut devenir infini quand les distances des deux planètes au Soleil deviennent égales entre elles. Il y a plus : l'ancienne méthode, généralement employée pour le développement de la fonction perturbatrice, a l'inconvénient grave d'introduire dans ce développement d'autres transcendantes où les mêmes facteurs se trouvent successivement élevés au carré, au cube, et à des puissances d'un degré supérieur; par conséquent, des transcendantes dont la valeur devient de plus en plus considérable quand les distances des deux planètes au Soleil sont entre elles dans un rapport qui ne diffère pas beaucoup de l'unité. J'évite cet inconvénient en me servant de l'un des théorèmes rappelés ci-dessus, pour rendre inégaux les modules des deux facteurs en question, et réduire l'un de ces facteurs à une fonction de la seule distance apparente des deux planètes. Alors, à la place de la triple série des transcendantes comprises dans l'ancien développement, j'obtiens une série double de transcendantes beaucoup plus faciles à calculer. Pour donner une idée de la réduction ainsi opérée dans les calculs, considérons en particulier le cas où les deux planètes données sont Jupiter et Saturne. Alors, en suivant l'ancienne méthode, on devra former le tableau qui se trouve inséré dans le troisième volume de la *Mécanique céleste*, aux pages 81, 82, 83, et calculer en conséquence plus de quatre-vingt-dix transcendantes, dont plusieurs offriront des valeurs considérables qui pourront s'élever jusqu'au nombre 800 et au-delà. Au contraire, en suivant la nouvelle méthode, pour arriver au même degré d'approximation, l'on aura seulement à calculer une vingtaine de transcendantes dont les douze premières sont déjà connues, et dont la plus grande surpasse à peine le nombre 2.

» Je passe maintenant à la propriété la plus extraordinaire du nouveau développement. Les diverses transcendantes qui, comme je l'ai dit, forment une série triple suivant l'ancienne méthode, et une série double suivant la nouvelle, sont, dans le développement de la fonction perturbatrice, multipliées chacune par un facteur variable, qui renferme, avec les éléments de deux orbites, les anomalies moyennes de deux planètes, et qui peut être développé en une série de termes dont l'un, indépendant

des anomalies, est ce qu'on nomme un terme séculaire, tandis que les autres sont des termes périodiques proportionnels aux sinus et cosinus de multiples des deux anomalies. Or, en m'appuyant sur le calcul des résidus et sur le premier des théorèmes précédemment rappelés, je prouve, 1° que chaque terme séculaire peut être exprimé sous forme finie par une certaine fonction des éléments des orbites, qui demeure algébrique par rapport aux grands axes et aux excentricités; 2° que, dans chaque terme périodique, le coefficient des sinus ou cosinus des multiples des anomalies moyennes est la somme d'une série simple de quantités, dont chacune peut encore être exprimée sous forme finie, par une certaine fonction des éléments, qui demeure algébrique par rapport aux grands axes, mais devient transcendante par rapport aux excentricités. Ajoutons qu'à la somme de cette dernière série on peut substituer la somme de deux fonctions, l'une exprimée sous forme finie, l'autre représentée par une intégrale définie, dont le module s'approche indéfiniment de zéro, tandis qu'un certain nombre entier n, dont elle dépend, devient de plus en plus considérable.

» En rédigeant le présent Mémoire, j'ai cherché à montrer combien je désirais me rendre digne, s'il était possible, de l'honneur que m'ont fait, il y a trois années, les maîtres de la science, en m'appelant à une place jadis occupée par un grand géomètre, par celui-là même qui avait eu pour moi tant de bienveillance, par notre illustre Lagrange. Comme mes nouvelles recherches paraissent devoir simplifier sensiblement les calculs relatifs à l'astronomie, il semblerait convenable que je pusse les discuter sérieusement avec ceux de mes illustres confrères qui ont jugé ma coopération à leurs travaux utile sous ce rapport. Mon désir de contribuer, autant que mes forces me le permettront, aux progrès de sciences qui ont fait la gloire de ma patrie, répond assez de l'empressement avec lequel je prendrais part à une semblable discussion le jour où il serait reconnu que le Bureau des Longitudes a pu se croire autorisé, par le texte de sa constitution même, à résoudre librement une question de géométrie, qu'il n'y a nul inconvénient à ce que ses divers membres se réunissent pour calculer ensemble les mouvements du Soleil ou des planètes, le jour où se terminerait une quarantaine déjà prolongée bien au delà des limites ordinairement prescrites par les réglements sanitaires les plus rigoureux, une quarantaine scientifique de trois années.

ANALYSE.

§ Ier. *Préliminaires.*

» Je vais, dans ces préliminaires, rappeler quelques théorèmes fournis par le calcul des résidus, et sur lesquels s'appuie la nouvelle méthode que je propose pour le développement de la fonction perturbatrice.

» 1er *Théorème.* Soit

$$s = re^{p\sqrt{-1}}$$

une variable imaginaire dont r représente le module et p l'argument. Soit encore

$$\underset{(\mathrm{a})}{\overset{(\mathrm{b})}{}}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\left(\frac{f(s)}{s}\right)$$

le résidu intégral de la fraction $\frac{f(s)}{s}$, pris entre les limites

$$r = \mathrm{a}, \quad r = \mathrm{b}, \quad p = 0, \quad p = 2\pi,$$

ou, ce qui revient au même, la somme des résidus de la fraction $\frac{f(s)}{s}$, correspondants aux valeurs de s dont les modules restent compris entre les limites a, b, et les arguments entre les limites π, $+\pi$. Si le résidu intégral dont il s'agit a une valeur déterminée, on aura

$$\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\mathrm{b}e^{p\sqrt{-1}}\right) dp - \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\mathrm{a}e^{p\sqrt{-1}}\right) dp = 2\pi \underset{(\mathrm{a})}{\overset{(\mathrm{b})}{}}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\left(\frac{f(s)}{s}\right),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(1) \quad \int_{0}^{2\pi} f\left(\mathrm{b}e^{p\sqrt{-1}}\right) dp - \int_{0}^{2\pi} f\left(\mathrm{a}e^{p\sqrt{-1}}\right) dp = 2\pi \underset{(\mathrm{a})}{\overset{(\mathrm{b})}{}}\mathcal{E}_{(0)}^{(2\pi)}\left(\frac{f(s)}{s}\right).$$

» *Démonstration.* Pour établir la formule (1), qui coïncide avec une équation trouvée dans le premier volume des *Exercices de Mathématiques* [voir l'équation (64), à la page 212 du premier volume], il suffit d'intégrer l'équation identique

$$\mathrm{D}_r f\left(re^{p\sqrt{-1}}\right) = \frac{1}{r\sqrt{-1}} \mathrm{D}_p f\left(re^{p\sqrt{-1}}\right),$$

par rapport à r et à p, entre les limites

$$r = \mathrm{a}, \quad r = \mathrm{b}, \quad p = 0, \quad p = 2\pi.$$

Observons d'ailleurs que, si l'une des racines de l'équation

$$(2) \qquad \frac{1}{f(s)} = 0$$

avait pour module une des limites a et b, le résidu partiel correspondant à cette racine devrait être réduit à moitié dans la somme représentée par le résidu intégral

$$\underset{(\mathrm{a})}{\overset{(\mathrm{b})}{}}\mathcal{E}_{(0)}^{(2\pi)}\left(\frac{f(s)}{(s)}\right).$$

On doit seulement excepter un cas particulier que nous examinerons ci-après, le cas où l'on aurait $\mathrm{a} = 0$.

» *Corollaire.* Si la fonction $f\left(re^{p\sqrt{-1}}\right)$ reste continue par rapport à r et à p entre les limites $r = \mathrm{a}$, $r = \mathrm{b}$, le second membre de l'équation (1) s'évanouira, et l'on aura par suite

$$(3) \qquad \int_0^{2\pi} f\left(\mathrm{b}e^{p\sqrt{-1}}\right) dp = \int_0^{2\pi} f\left(\mathrm{a}e^{p\sqrt{-1}}\right) dp.$$

En conséquence, on peut énoncer la proposition suivante :

» 2e *Théorème.* Si dans une intégrale de la forme

$$\int_1^{2\pi} f\left(re^{p\sqrt{-1}}\right) dp$$

on fait varier le module r, cette intégrale conservera la même valeur, tant que la fonction

$$f\left(re^{p\sqrt{-1}}\right)$$

ne cessera pas d'être continue.

» Concevons maintenant que, dans la formule (1), on pose $\mathrm{a} = 0$, $\mathrm{b} = \alpha$; on en tirera

$$\int_0^{2\pi} f\left(\mathrm{a}e^{p\sqrt{-1}}\right) dp = 2\pi \underset{(0)}{\overset{(\alpha)}{}}\mathcal{E}_{(0)}^{(2\pi)}\left(\frac{f(s)}{s}\right),$$

pourvu que, dans la somme représentée par la notation

$$\overset{(\alpha)}{\underset{(0)}{}}\mathcal{E}_{(0)}^{(2\pi)}\left(\frac{f(s)}{s}\right),$$

on comprenne non pas la moitié du résidu partiel qui pourrait correspondre à la valeur zéro de s, mais ce résidu lui-même. Donc, sous cette condition, on pourra énoncer encore la proposition suivante :

» 2ᵉ *Théorème*. Si le résidu intégral

$$\overset{(\alpha)}{\underset{(0)}{}}\mathcal{E}_{(0)}^{(2\pi)}\left(\frac{f(s)}{s}\right)$$

a une valeur déterminée, on aura

$$(4)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\alpha e^{p\sqrt{-1}}\right)dp = \overset{(\alpha)}{\underset{(0)}{}}\mathcal{E}_{(0)}^{(2\pi)}\left(\frac{f(s)}{s}\right).$$

» *Corollaire* 1ᵉʳ. Dans les applications de ce théorème, on ne devra pas oublier que la somme représentée par la notation

$$\overset{(\alpha)}{\underset{(0)}{}}\mathcal{E}_{(0)}^{(2\pi)}\left(\frac{f(s)}{s}\right)$$

comprend tous les résidus partiels correspondants aux racines de l'équation

$$(5)\qquad \frac{s}{f(s)}=0,$$

qui offrent des modules inférieurs à α, et la moitié seulement de tout résidu partiel correspondant à une racine qui aurait α pour module.

» *Corollaire* 2ᵉ. Si dans la formule (4) on pose

$$f(s)=\frac{se^{-\varpi\sqrt{-1}}}{1-se^{-\varpi\sqrt{-1}}}\,\mathrm{f}(s),$$

f(s) étant une fonction qui ne devienne jamais infinie pour un module

de s inférieur à l'unité, alors on trouvera : 1° en supposant $\alpha < 1$,

$$(6) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\alpha e^{(p-\varpi)\sqrt{-1}}}{1-\alpha e^{(p-\varpi)\sqrt{-1}}} f(\alpha e^{p\sqrt{-1}})\,dp = 0;$$

2° en prenant $\alpha > 1$, ou, ce qui revient au même, en remplaçant α par $\frac{1}{\alpha}$, et supposant ensuite $\alpha < 1$,

$$(7) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-\alpha e^{(p-\varpi)\sqrt{-1}}} f\left(\frac{1}{\alpha} e^{p\sqrt{-1}}\right) dp = f(e^{\varpi\sqrt{-1}}).$$

On aura donc

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} f(e^{\varpi\sqrt{-1}}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\alpha e^{(p-\varpi)\sqrt{-1}}}{1-\alpha e^{(p-1)\sqrt{-1}}} f(\alpha e^{p\sqrt{-1}})\,dp \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-\alpha e^{-(p-\varpi)\sqrt{-1}}} f\left(\frac{1}{\alpha} e^{p\sqrt{-1}}\right) dp. \end{aligned} \right.$$

La formule (8) subsisterait encore si l'on prenait $\alpha = 1$; seulement alors les seconds membres des formules (6), (7) se trouveraient réduits l'un et l'autre à $\frac{1}{2} f\left(e^{\varpi\sqrt{-1}}\right)$.

» Concevons maintenant que, dans le second membre de la formule (8), on développe les fractions

$$\frac{\alpha e^{(p-\varpi)\sqrt{-1}}}{1-\alpha e^{(p-\varpi)\sqrt{-1}}}, \qquad \frac{1}{1-\alpha e^{(p-\varpi)\sqrt{-1}}}$$

suivant les puissances ascendantes de α. Si la fonction $f(s)$ reste continue pour tout module de s inférieur à $\frac{1}{\alpha}$, on pourra, en vertu du théorème 2e, remplacer, dans chaque terme du développement obtenu, α par l'unité; et alors on trouvera

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} f(e^{\varpi\sqrt{-1}}) &= a_0 + a_1 e^{\varpi\sqrt{-1}} + a_2 e^{2\varpi\sqrt{-1}} + \ldots + a_n e^{n\varpi\sqrt{-1}} \\ &+ a_{-1} e^{-\varpi\sqrt{-1}} + a_{-2} e^{-2\varpi\sqrt{-1}} + \ldots + a_{-n} e^{-n\varpi\sqrt{-1}} + \rho_n, \end{aligned} \right.$$

les valeurs de $a_{\pm n}$ et de ρ_n étant généralement déterminées par les formules

$$(10) \qquad a_{\pm n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\mp np\sqrt{-1}}\, f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right) dp,$$

$$(11) \qquad \begin{cases} \rho_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{\alpha^{n+1} e^{(n+1)(p-\varpi)\sqrt{-1}}}{1-\alpha e^{(p-\varpi)\sqrt{-1}}}\, f\left(\alpha e^{p\sqrt{-1}}\right) dp \\ \quad + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{\alpha^n e^{n(\varpi-p)\sqrt{-1}}}{1-\alpha e^{(\varpi-p)\sqrt{-1}}}\, f\left(\dfrac{1}{\alpha} e^{p\sqrt{-1}}\right) dp. \end{cases}$$

La dernière de ces formules entraîne évidemment la suivante :

$$(12) \qquad \text{mod.}\,\rho_n < \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\left[\alpha\,\text{mod.}\, f\left(\alpha e^{p\sqrt{-1}}\right) + \text{mod.}\, f\left(\frac{1}{\alpha} e^{p\sqrt{-1}}\right)\right],$$

en vertu de laquelle ρ_n décroît indéfiniment pour des valeurs croissantes du nombre entier n. Donc, en posant $n = \infty$ dans l'équation (9), on obtiendra celle-ci :

$$(13) \qquad \begin{cases} f\left(e^{\varpi\sqrt{-1}}\right) = a_0 + a_1 e^{\varpi\sqrt{-1}} + a_2 e^{2\varpi\sqrt{-1}} + \ldots \\ \qquad\qquad + a_{-1} e^{-\varpi\sqrt{-1}} + a_2 e^{2\varpi\sqrt{-1}} + \ldots, \end{cases}$$

qui servira à développer l'expression

$$f\left(e^{\varpi\sqrt{-1}}\right)$$

en série convergente. Il y a plus : la formule (12) fournira une limite de l'erreur que l'on commet quand on arrête cette série après un certain nombre de termes.

» Si la fonction

$$f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)$$

est une fonction paire de p qui ne varie pas quand p change de signe ; alors, en posant

$$P = f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right) = \frac{f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right) + f\left(e^{-p\sqrt{-1}}\right)}{2},$$

$$\mathfrak{P} = f\left(e^{\varpi\sqrt{-1}}\right) = \frac{f\left(e^{\varpi\sqrt{-1}}\right) + f\left(e^{-\varpi\sqrt{-1}}\right)}{2},$$

on verra l'équation (13) se réduire à la formule connue

$$(14)\qquad \mathfrak{P} = \mathrm{a}_0 + 2\mathrm{a}_1 \cos\varpi + 2\mathrm{a}_2 \cos_2\varpi + \ldots,$$

la valeur de a_n étant

$$(15)\qquad \mathrm{a}_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\pm np\sqrt{-1}}\,\mathrm{P}\,dp = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{P}\cos npdp.$$

» Si, dans l'équation (4), on pose $\alpha = 1$, on obtiendra simplement la proposition suivante :

» 4e *Théorème*. Si le résidu intégral

$$\overset{(\alpha)}{\underset{(0)}{}}\mathcal{E}\overset{(2\pi)}{\underset{(0)}{}}\left(\frac{f(s)}{s}\right)$$

a une valeur déterminée, on aura

$$(16)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f\left(e^{p\sqrt{-1}}\right)dp = \overset{(1)}{\underset{(0)}{}}\mathcal{E}\overset{(2\pi)}{\underset{(0)}{}}\left(\frac{f(s)}{s}\right).$$

» Du 4e théorème on déduit immédiatement le suivant :

» 5e *Théorème*. Si le résidu intégral

$$\overset{(1)}{\underset{(0)}{}}\mathcal{E}\overset{(2\pi)}{\underset{(0)}{}}\ \overset{(1)}{\underset{(0)}{}}\mathcal{E}\overset{(2\pi)}{\underset{(0)}{}}\left(\frac{f(s,s')}{ss'}\right)$$

a une valeur déterminée, on aura

$$(17)\qquad \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(e^{p\sqrt{-1}},\ e^{p'\sqrt{-1}}\right)dp = \overset{(1)}{\underset{(0)}{}}\mathcal{E}\overset{(2\pi)}{\underset{(0)}{}}\ \overset{(1)}{\underset{(0)}{}}\mathcal{E}\overset{(2\pi)}{\underset{(0)}{}}\left(\frac{f(s,s)}{ss'}\right).$$

§ II. *Développement de la fonction perturbatrice.*

» Soient m, m' les masses de deux planètes;

r, r' leurs distances au Soleil;

v la distance effective entre ces deux planètes;

δ leur distance apparente, vue du centre du Soleil;

R la fonction perturbatrice relative à la planète m.

On aura

$$R = \frac{m' r \cos \delta}{r'^2} + \ldots - \frac{m'}{v} - \ldots$$

Il s'agit maintenant de développer les rapports de la forme

$$\frac{r \cos \delta}{r'^2},$$

et de la forme

$$\frac{1}{v}.$$

Nous considérerons ici en particulier le rapport $\frac{1}{v}$, dont le développement offre plus de difficultés, et entraîne d'ailleurs immédiatement le développement de l'autre rapport $\frac{r \cos \delta}{r'^2}$.

» La valeur de v étant

$$v = (r^2 - 2rr' \cos \delta + r'^2)^{\frac{1}{2}},$$

on en conclut

$$(1) \qquad \frac{1}{v} = \frac{1}{r'} \left(1 - 2\frac{r}{r'} \cos \delta + \frac{r^2}{r'^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

On aura d'ailleurs

$$(2) \quad \left(1 - 2\frac{r}{r'} \cos \delta + \frac{r^2}{r'^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{r}{r'} e^{\delta \sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{r}{r'} e^{-\delta \sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}};$$

et, si, pour fixer les idées, on suppose

$$r < r',$$

alors, pour obtenir le développement de $\frac{1}{v}$ suivant les cosinus des multiples de δ, il suffira de développer suivant les puissances de $\frac{r}{r'}$ chacun des facteurs qui composent le second membre de l'équation (2). On pourra d'ailleurs atteindre le même but à l'aide de la formule (14) du § Ier, et de plus, déterminer par la formule (12) du même paragraphe les limites de l'erreur que l'on commettra quand on arrêtera le développement obtenu

après un certain nombre de termes. La formule (14) du § Ier donnera

$$(3)\qquad \frac{1}{v} = \Delta_0 + 2\Delta_1 \cos\delta + 2\Delta_2 \cos 2\delta + \ldots,$$

la valeur de Δ_k étant

$$\Delta_k = \frac{1}{2\pi r'} \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\frac{r}{r'}\cos v + \frac{r^2}{r'^2}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{\pm kv\sqrt{-1}}\, dv,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\Delta_k = \frac{1}{2\pi r'} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{r}{r'} e^{v\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{r}{r'} e^{-v\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{kv\sqrt{-1}}\, dv.$$

D'ailleurs, eu égard au 2e théorème du § Ier, on pourra, sans altérer la valeur précédente de Δ_k, y multiplier $e^{v\sqrt{-1}}$ par un facteur positif compris entre les deux rapports $\frac{r}{r'}$, $\frac{r'}{r}$, ou même par le rapport $\frac{r}{r'}$. Donc la valeur de Δ_k pourra être réduite à

$$(4)\quad \Delta_k = \frac{r^k}{2\pi r'^{k+1}} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{r^2}{r'^2} e^{v\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - e^{-v\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{kv\sqrt{-1}}\, dv.$$

Soient maintenant

$$a,\quad a'$$

les demi grands axes des orbites des planètes m, m'. Le rapport $\frac{r^2}{r'^2}$ sera généralement peu différent du rapport $\frac{a^2}{a'^2}$. On pourra donc développer

$$\left(1 - \frac{r^2}{r'^2} e^{v\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

suivant les puissances ascendantes de la différence

$$\frac{r^2}{r'^2} - \frac{a^2}{a'^2}.$$

En opérant ainsi, et posant, pour abréger, $\theta = \frac{a}{a'}$,

$$(5)\qquad [k]_l = \frac{k(k+1)\ldots(k+l-1)}{1.2\ldots l},$$

$$(6)\quad \Theta_{k,l} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - e^{-v\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \theta^2 e^{v\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}-l} e^{(k+l)v\sqrt{-1}}\, dv,$$

on trouvera

$$(7)\qquad \Delta_k = \Sigma\left[\tfrac{1}{2}\right]_l \Theta_{k,l}\, a^{2l}\, \frac{r^k}{r'^{k+2l+1}}\left(\frac{r^2}{a^2}-\frac{r'^2}{a'^2}\right)^l,$$

et par suite

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{v} = {} & \sum_{l=0}^{l=\infty}\left[\frac{1}{2}\right]_l \Theta_{0,l}\,\frac{a^{2l}}{r'^{2l+1}}\left(\frac{r^2}{a^2}-\frac{r'^2}{a'^2}\right)^l \\ & + 2\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\frac{1}{2}\right]_l \Theta_{k,l}\,\frac{a^{2l}r^k}{r'^{k+2l+1}}\left(\frac{r^2}{a^2}-\frac{r'^2}{a'^2}\right)^l \cos k\delta. \end{aligned}\right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$(9)\qquad \frac{1}{v} = \sum_{l=0}^{l=\infty}\Theta_{0,l}\,\mathrm{P}_{0,l} + 2\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{k=1}^{k=\infty}\Theta_{k,l}\,\mathrm{P}_{k,l},$$

la valeur de $\mathrm{P}_{k,l}$ étant

$$(10)\qquad \mathrm{P}_{k,l} = \left[\frac{1}{2}\right]_l \frac{a^{2l}r^k}{r'^{k+2l+1}}\left(\frac{r^2}{a^2}-\frac{r'^2}{a'^2}\right)^l \cos k\delta.$$

» Soient maintenant, pour les planètes m et m',

$$\mathrm{T},\ \mathrm{T}'$$

les anomalies moyennes, et

$$\psi,\ \psi'$$

les anomalies excentriques, liées aux anomalies moyennes et aux rayons vecteurs par les formules

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} & r = a(1-\varepsilon\cos\psi), && r' = a'(1-\varepsilon'\cos\psi'), \\ & \psi - \varepsilon\sin\psi = \mathrm{T}, && \psi' - \varepsilon'\sin\psi' = \mathrm{T}', \end{aligned}\right.$$

dans lesquelles ε, ε' représentent les excentricités. $\mathrm{P}_{k,l}$ sera une fonction rationnelle des exponentielles trigonométriques

$$e^{\psi\sqrt{-1}},\quad e^{\psi'\sqrt{-1}},$$

et pourra être développée suivant les puissances de

$$e^{T\sqrt{-1}},\quad e^{T'\sqrt{-1}},$$

à l'aide de la formule

$$(12)\qquad P_{k,l} = \Sigma\Sigma\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 e^{(nT+n'T')\sqrt{-1}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_{k,l}\, e^{-(nT+n'T')\sqrt{-1}}\, dT dT',$$

les signes Σ s'étendant à toutes les valeurs entières positives, nulles ou négatives de n, n'. Donc, dans le développement de $P_{k,l}$, le coefficient du produit

$$e^{(nT+n'T')\sqrt{-1}}$$

sera représenté par l'intégrale

$$(13)\qquad \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} P_{k,l}\, e^{-(nT+n'T')\sqrt{-1}}\, dT dT',$$

ou, ce qui revient au même, par l'intégrale

$$(14)\quad \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} P_{k,l}\,\frac{rr'}{aa'}\, e^{-(n\psi+n'\psi')\sqrt{-1}}\, e^{(n\varepsilon\sin\psi+n'\varepsilon'\sin\psi')\sqrt{-1}}\, d\psi\, d\psi'.$$

Si l'on suppose, en particulier, $n=0$, $n'=0$, l'intégrale (14) sera réduite à

$$(15)\qquad \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} P_{k,l}\,\frac{rr'}{aa'}\, d\psi d\psi'.$$

Désignons maintenant par

$$f\left(e^{\psi\sqrt{-1}},\quad e^{\psi'\sqrt{-1}}\right)$$

le produit

$$P_{k,l}\,\frac{rr'}{aa'}$$

exprimé en fonction rationnelle de $e^{\psi\sqrt{-1}}$, $e^{\psi'\sqrt{-1}}$. Le cinquième théorème du § Ier donnera immédiatement

$$(16)\quad \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} P_{k,l}\,\frac{rr'}{aa'}\, d\psi\, d\psi' = \overset{(1)}{\underset{(0)}{\mathcal{E}}}{}^{(2\pi)}_{(0)}\;\overset{(1)}{\underset{(0)}{\mathcal{E}}}{}^{(2\pi)}_{(0)}\left(\frac{f(s,s')}{s,s'}\right).$$

De plus, comme on aura, d'une part,

$$e^{(n\varepsilon\sin\psi+n'\varepsilon'\sin\psi')\sqrt{-1}}=e^{n\varepsilon e^{\psi\sqrt{-1}}+n'\varepsilon' e^{\psi'\sqrt{-1}}}\,e^{-n\varepsilon e^{-\psi\sqrt{-1}}-n'\varepsilon' e^{-\psi'\sqrt{-1}}};$$

et d'autre part,

$$e^s=1+\frac{s}{1}+\frac{s^2}{1.2}+\ldots+\frac{s^h}{1.2\ldots h}+\frac{s^h}{1.2\ldots h}\int_0^1 v^h e^{s(v-1)}\,dv,$$

on trouvera encore

$$(17)\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{P}_{k,l}\frac{rr'}{aa'}\,e^{-(n\psi+n'\psi')\sqrt{-1}}\,e^{(n\varepsilon\sin\psi+n'\varepsilon'\sin\psi')\sqrt{-1}}d\psi\,d\psi'\\ =\underset{(0)}{\overset{(1)}{}}\mathcal{E}_{(0)}^{(2\pi)}\underset{(0)}{\overset{(1)}{}}\mathcal{E}_{(0)}^{(2\pi)}\left(e^{n\varepsilon s+n'\varepsilon's'}\left[1-\left(\frac{n\varepsilon}{s}+\frac{n'\varepsilon'}{s'}\right)+\ldots\pm\frac{1}{1.2\ldots h}\left(\frac{n\varepsilon}{s}+\frac{n'\varepsilon'}{s'}\right)^h\right]\frac{\mathrm{f}(s,s')}{s^{n+1}s'^{n'+1}}\right),\\ +\rho_h,\end{array}\right.$$

ρ_h étant ce que devient l'intégrale (14) quand on y remplace, sous le signe $\int$, le facteur

$$e^{(n\varepsilon\sin\psi+n'\varepsilon'\sin\psi')\sqrt{-1}}$$

par le produit

$$\pm e^{n\varepsilon e^{\psi\sqrt{-1}}+n'\varepsilon' e^{\psi'\sqrt{-1}}}\frac{\left(n\varepsilon e^{-\psi\sqrt{-1}}+n'\varepsilon' e^{-\psi'\sqrt{-1}}\right)^h}{1.2\ldots h}\int_0^1 v^h e^{(1-v)\left(n\varepsilon e^{-\psi\sqrt{-1}}+n'\varepsilon' e^{-\psi'\sqrt{-1}}\right)}dv.$$

Cela posé, il est clair que ρ_h décroîtra indéfiniment pour des valeurs croissantes de h, et de telle manière qu'il sera facile de calculer la limite de l'erreur que l'on commettra en négligeant ρ_h dans le second membre de l'équation (17). Ajoutons que, si l'on pose, dans cette même équation $h=\infty$, on aura simplement

$$(18)\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{P}_{k,l}\frac{rr'}{aa'}\,e^{-(n\psi+n'\psi')\sqrt{-1}}\,e^{(n\varepsilon\sin\psi+n'\varepsilon'\sin\psi')\sqrt{-1}}\,d\psi\,d\psi'\\ =\underset{(0)}{\overset{(1)}{}}\mathcal{E}_{(0)}^{(2\pi)}\underset{(0)}{\overset{(1)}{}}\mathcal{E}_{(0)}^{(2\pi)}\left(e^{n\varepsilon s+n'\varepsilon's'}\left[1-\left(\frac{n\varepsilon}{s}+\frac{n'\varepsilon'}{s'}\right)+\frac{1}{1.2}\left(\frac{n\varepsilon}{s}+\frac{n'\varepsilon'}{s'}\right)^2+\ldots\right]\frac{\mathrm{f}(s,s')}{s^{n+1}s'^{n'+1}}\right).\end{array}\right.$$

Les formules (14), (17), (18) comprennent les diverses propositions que nous avons énoncées dans le préambule de ce Mémoire; nous montrerons, dans un autre, comment on peut rendre plus simples encore et plus faciles les calculs qui résultent de l'application de ces formules. »

ANATOMIE COMPARÉE.—*Sur les dents des Musaraignes, considérées dans leur composition et leur structure intime, leurs rapports avec les mâchoires, leur développement et leur succession; par* M. **Duvernoy.**

« Le titre de ce Mémoire en expose le plan. J'y considère les substances dont se composent les dents des mammifères en général, et celles des Musaraignes en particulier, leur structure intime ou microscopique, leur développement et leur succession, et je compare mes propres observations aux derniers progrès que la science vient de faire, particulièrement au sujet des dents des mammifères, après les avoir étudiées sous ces divers points de vue.

» Le § Ier traite de la *composition des dents des mammifères en général.*

» J'y rappelle, entre autres, la découverte de Tenon sur le *cortical osseux* des dents de cheval et de ruminants, que G. Cuvier nommait *cément* dès 1803, parce qu'il sert à lier les différentes lames dont une dent d'éléphant ou de cabiai est formée originairement.

» Le § II, sur la *substance principale* ou *tubuleuse des dents*, est divisé en deux parties.

» La première est historique, et la seconde est un exposé des résultats et de quelques détails de mes propres observations.

» J'adopte la dénomination de *substance principale* pour celle que Hunter et Cuvier désignent sous le nom d'*ivoire*, en donnant à ce nom spécifique une acception générique. Je me sers encore pour cette même partie de la désignation de *substance tubuleuse* que lui donne M. J. Muller, parce qu'elle exprime très-bien sa structure intime. Celle de *substance osseuse*, encore en usage dans des Mémoires et des Ouvrages très-recommandables d'ailleurs, me paraît doublement fautive, en ce qu'elle semble indiquer une identité entre cette substance et les os, ou entre le *cortical osseux* de Tenon.

» Il n'y a pas de ressemblance réelle, dans la structure intime, entre la substance principale des dents et les os. MM. Frœnckel et Purkinje l'ont déjà démontré à la fin de 1835. Dans les années suivantes (1836 et 1837), MM. J. Muller et Retzius ont ajouté de précieuses observations de détail à celles des anatomistes précédents, qui font voir, de la manière la plus évidente, que la substance principale des dents de l'*homme*, des *mammifères*, des *reptiles* et des *poissons*, est composée de canaux, avec quelques diffé-

rences dans leur arrangement, suivant les genres ou les familles. Ces canaux ont des parois propres, que les sels calcaires dont ils sont pénétrés rendent rigides, et qui deviennent souples lorsqu'on enlève ces sels par les acides. En 1838, M. Dujardin a confirmé une partie des faits annoncés par MM. Frœnkel, Purkinje, J. Muller et Retzius, faits déjà indiqués par Leuwenhoeck en 1678 et 1680, et par Blake (1) en 1802.

» Les observations sur les dents des poissons, que M. R. Owen a fait connaître dès 1839 et 1840, dans les deux Mémoires qu'il a adressés à l'Académie des Sciences, et le résumé qu'il y fait de la structure intime des dents de cette classe avec celle des dents de mammifères, montre que ce savant est parvenu, sur la connaissance de cette structure intime, aux mêmes résultats que ses prédécesseurs.

» Nous reviendrons d'ailleurs, en parlant du développement des dents, sur la manière dont M. Owen (2) envisage leur accroissement.

» J'ai étudié *la substance tubuleuse*, ou *principale* des dents, dans celles des *Sorex araneus*, *tetragonurus* et *fodiens*, et comparativement dans les dents de la *chauve-souris commune* et de la *taupe*, parmi les autres *insectivores*; du *rat d'eau*, du *campagnol* et d'un fœtus de *lapin*, parmi les *rongeurs*.

» Voici le résultat général de mes observations :

» Chez ces petits animaux, on a l'avantage de pouvoir amincir assez une branche tout entière de la mâchoire inférieure, ou des portions considérables de la supérieure, pour en observer à la fois toutes les dents en place, même à un grossissement considérable, en faisant mouvoir la pièce au foyer du microscope.

» Mes préparations ont l'avantage, qui, j'espère, sera apprécié, de faire voir, non des portions de dents ou de tubes, mais tous les tubes apercevables sur la surface entière d'une coupe verticale, non-seulement d'une seule dent, mais de toutes les dents d'un côté, d'une même mâchoire. On y peut étudier à la fois leur origine autour du bulbe dentaire, leur disposition générale dans tout leur trajet et leur terminaison.

» Ces préparations d'ensemble sont on ne peut plus instructives.

---

(1) Nous ne pensons pas, comme Blake, dit M. Cuvier, *qu'il y ait des vaisseaux dans la substance osseuse*. — *Recherches sur les Ossements fossiles*, t. I, p. 32.

(2) *Voir* encore son grand ouvrage intitulé *Odontography*, etc. London, 1840 et 1841.

» Ainsi amincies par leurs deux côtés, ces dents nous ont montré des tubes nombreux, dirigés des parois de la cavité du bulbe dentaire, ou du noyau pulpeux, vers la surface de la dent.

» Lorsqu'on observe ces parois sous certains aspects, on y distingue très-bien les embouchures de ces tubes, que nous appellerons calcigères avec M. R. Owen.

» Leur direction et leur longueur varient suivant la position et la distance de la surface vers laquelle ils doivent se porter.

» Observés avec plus d'attention, beaucoup ne montrent de coloration que dans leurs parois; leur canal paraît blanc et même transparent, comme la gangue qu'ils traversent. Dans les molaires, ceux qui se dirigent vers les saillies sont non-seulement les plus longs, mais encore les plus nombreux dans un espace donné, de sorte qu'ils forment comme un faisceau ou un écheveau de tubes à peu près parallèles.

» Dans l'*incisive inférieure* la plupart ont une direction transversale, qui devient de plus en plus oblique en avant, pour ceux qui s'approchent de la pointe, et directe dans ce sens, pour les tubes qui partent du sommet du canal du bulbe.

» Leur obliquité est en sens contraire pour les tubes qui appartiennent à la racine de cette dent.

» Dans les molaires c'est de tous les points de la cavité centrale du bulbe que ces tubes rayonnent vers la surface, non directement, mais en s'infléchissant dans un sens ou dans un autre; et comme cette cavité se divise et se prolonge dans les racines, c'est encore des parois du canal de celles-ci, que les tubes se dirigent vers la surface; mais toujours plus ou moins obliquement, en partant de la cavité principale, et en se portant à la fois en dehors et vers l'extrémité de la racine. J'insiste sur cette direction, parce qu'elle indique, à mon avis, la marche de l'activité nutritive, qui a son centre d'action ou d'impulsion autour du noyau pulpeux principal, et qui rayonne de ce centre vers toute la circonférence de la dent, c'est-à-dire aussi bien vers celle de sa couronne, que vers celle de ses racines. Seulement, dans celles-ci, l'impulsion nutritive du noyau principal n'agit que par l'intermédiaire des branches qu'il y projette.

» Les tubes ou les canaux de la substance principale, très-serrés les uns près des autres, à leur origine et dans une partie de leur trajet, au point qu'on les distingue à peine, vus par transparence, et qu'ils paraissent comme des taches de couleur grise, se séparent en devenant moins nom-

breux à mesure que l'on s'éloigne du bulbe dentaire. Dans une dent ancienne, la plupart ne se prolongent pas jusqu'à l'émail; de sorte que la partie de la substance tubuleuse qui s'approche de l'émail montre de moins en moins de ces tubes, sans doute parce qu'ayant été remplis de substance calcaire, et leurs parois ayant été pénétrées de cette même substance, comme la gangue que ces tubes traversent, ces parois ne peuvent plus s'en distinguer. Un certain nombre cependant, après s'être ramifiés en diminuant de calibre, et s'être anastomosés entre eux, vont se terminer dans une ligne noire, comme réticulée, qui sépare assez nettement de l'émail la substance tubulée.

» Cette ligne est importante à étudier; elle répond à la membrane très-fine que G. Guvier a découverte dans les mâchelières d'éléphant, *entre la prétendue substance osseuse et l'émail*, et qui enveloppe immédiatement, ajoute-t-il, et serre de très-près le petit mur gélatineux, lorsqu'il n'y a encore aucune partie de l'émail de transsudée (1). C'est ce petit mur gélatineux qui deviendra la dent en forme de lame, dont plusieurs réunies composent une molaire de ces animaux.

» Le diamètre des tubes près du bulbe, et dans la plus grande partie de leur trajet, est de $\frac{1}{500}$ de millimètre au plus.

» M. *Retzius* figure des cellules calcaires rangées dans les intervalles des dernières ramifications des tubes dentaires de plusieurs animaux (entre autres dans les incisives du *cheval*). C'est là où leurs ramuscules les plus fins viennent se terminer en rayonnant.

» Je n'ai rien vu de semblable dans les dents des Musaraignes. Leur substance tubuleuse ne montre, en général, aucune de ces cellules étoilées qui caractérisent la substance osseuse.

» Ce que cet estimable auteur dit de la substance tubuleuse des dents du *Sorex fodiens* me fait penser qu'il n'y a pas observé, plus que moi, de cellules calcaires.

» La substance tubuleuse ne m'a montré aucune différence importante dans les dents de la *chauve-souris* commune, dans celles de la *taupe*, ni dans les incisives du *rat d'eau* et de fœtus de *lapin*, comparativement à celles des Musaraignes. Je ne puis donner ici qu'un extrait de mes observations de détail à ce sujet.

» Dans la *taupe*, les tubes calcigères ont beaucoup de rapports avec ceux

---

(1) *Recherches sur les Ossements fossiles*, T. I, p. 33; édit. in-4°. Paris, 1821.

de la chauve-souris. Ils sont très-flexueux, ramifiés, et serrés les uns près des autres autour des parois du noyau pulpeux, comme les jeunes arbres d'une épaisse revenue.

» Leur direction générale, dans les molaires, s'élève des parois de la cavité du noyau pulpeux de la couronne vers la surface de celle-ci; mais elle ne descend pas de cette surface vers les racines. Ici ces tubes partent des parois du noyau pulpeux qui occupe l'axe de la racine, en se portant en travers et un peu obliquement en haut; de sorte que l'impulsion nutritive semble avoir cette direction. Il n'y a que vers le bas de la racine que la direction de ces tubes est d'abord exactement transversale, puis oblique en bas, et enfin directe dans ce sens. Ce sont ceux qui vont de l'extrémité du noyau pulpeux vers celle de la racine.

» J'insiste sur la direction des tubes, relativement au bulbe et à la surface de la dent, parce que c'est évidemment une indication de la marche qu'à dû suivre le dépôt successif des sels calcaires.

» Dans une lame d'incisive de *rat d'eau* (1) longitudinale et verticale, la portion inférieure de cette lame, qui est au-dessous du noyau pulpeux, montre des tubes qui vont assez directement en travers, de la paroi de ce noyau vers la surface qui est garnie d'émail. Ces tubes sont un peu flexueux dans leur trajet, pressés les uns vers les autres, on ne peut plus nombreux. Comme ils s'infléchissent légèrement dans tous les sens, ils passent derrière ou devant les uns des autres, de manière qu'on ne peut pas suivre le même tube depuis son origine à sa terminaison; près de celle-ci, ils forment des anastomoses extrêmement fines et comme une sorte de réseau qui s'étend dans une bande rapprochée de l'émail et qui est limitée de ce côté par une double chaînette qui sépare les deux substances.

» L'origine des tubes dans la paroi du noyau pulpeux est manifeste dans une portion supérieure de cette coupe. Un grand nombre de points noirs qui s'y dessinent sont évidemment les orifices de ces tubes.

» Dans une autre coupe, on les voit se continuer de la membrane qui revêt la cavité du noyau pulpeux, et on les distingue parfaitement les uns des autres à leur origine, et pendant un court trajet, comme des troncs de jeunes arbres. Mais ils ne tardent pas à se serrer et à s'entrelacer par

---

(1) Cette lame verticale et longitudinale comprend une partie de la cavité du noyau pulpeux et les deux côtés de la substance tubuleuse, supérieurs et inférieurs à cette cavité.

leurs sinuosités et leurs nombreuses ramifications, à la manière des branches et des rameaux d'une belle revenue de forêt.

» Ici leur direction transversale et très-peu oblique en avant, des parois du noyau pulpeux vers la surface convexe ou inférieure, qui est garnie d'émail, est très-remarquable.

» Le § III traite *du bulbe dentaire* ou *de l'organe producteur de la substance principale des dents.*

» L'histoire du *bulbe dentaire* est inséparable de celle de la partie principale des dents. Toute dent simple, dont il est l'organe producteur, lui doit sa forme et ses dimensions, déterminées l'une et l'autre par le canevas qu'il lui fournit.

» Le bulbe dentaire est ce noyau pulpeux de couleur rouge ou jaunâtre, remplissant la cavité qui occupe, dans une dent toute formée, le centre de la couronne, se prolonge dans ses proéminences et se continue dans l'axe de ses racines. Toutes ces productions du noyau pulpeux, qui répondent aux proéminences principales de la dent et répètent, en dedans, sa forme extérieure, se réunissent à la base de la couronne, où se trouve le centre d'action de ce noyau.

» La paroi de la cavité simple ou compliquée du noyau pulpeux est tapissée par une membrane très-fine, irrégulièrement réticulée, ayant l'apparence noire, vue par transparence, à un grossissement de 400 diamètres. On dirait une gaze noire qui enveloppe la substance gélatineuse, homogène, rouge ou jaunâtre, qui forme en apparence toute la masse du noyau pulpeux.

» Cette membrane est évidemment en rapport immédiat avec les tubes de la substance principale, qui ont leur origine dans la paroi de la cavité du bulbe qu'elle tapisse. Sa couleur apparente et sa constitution me font penser que c'est sa continuation qui produit cette ligne noire réticulée, indiquant la limite entre l'émail et la substance tubulée.

» Le noyau pulpeux reçoit des vaisseaux sanguins considérables, qui lui apportent les matériaux de sa sécrétion.

» Le produit de cette sécrétion est versé dans la poche que forme ce noyau, qui en est, pour ainsi dire, le réservoir.

» Ce produit, dans une incisive de mâchoire inférieure de fœtus de lapin, conservé depuis longtemps dans l'esprit-de-vin, m'a paru composé de granulations blanches, ayant en quelque sorte l'apparence de grains de fécule.

» Je n'ai pu lui découvrir aucune forme, aucune organisation dans le

noyau pulpeux des dents des Musaraignes. Il m'a toujours paru une substance homogène, comme gélatineuse, rouge ou jaune, contenue dans une poche membraneuse très-mince, recevant d'un côté des vaisseaux sanguins, par des branches que lui envoient ceux du canal dentaire, et donnant de toute sa surface, en contact avec les parois de la cavité qu'il remplit, des canaux qui pénètrent immédiatement dans la substance tubuleuse.

» On peut conclure de cette étude de la substance principale et du bulbe dentaire :

» 1°. Que ce bulbe se compose de deux parties distinctes, ayant chacune une fonction particulière;

» 2°. L'une, en rapport immédiat avec les vaisseaux sanguins qui arrivent à la capsule dentaire, est une sorte de follicule dont les parois sécrètent et versent dans la cavité de ce follicule ou du noyau pulpeux les matériaux de la substance tubuleuse : c'est à la fois l'organe préparateur et le réservoir de ces matériaux;

» 3°. L'autre partie du bulbe, qui enveloppe la première, est le canevas de la substance principale ou tubuleuse de la dent, lequel se durcit à mesure que les tubes capillaires dont il se compose reçoivent et absorbent les matériaux préparés par l'organe sécréteur de ce bulbe.

» 4°. Cette théorie concilie jusqu'à un certain point l'ancienne, qui regardait la formation des dents comme une sécrétion de la surface du bulbe, avec celle adoptée récemment par M. Owen, qui admet que les dents croissent comme les os, par intussusception, et que leur durcissement ne diffère de celui des os, que parce qu'il est centripète dans les dents et centrifuge dans les os.

» 5°. Le bulbe ne me paraît donc pas destiné tout entier à se transformer en dent. Dans tous les cas, il en est réellement, dans une de ses partie, l'organe sécréteur, en ce qu'il en prend les matériaux dans le sang, et qu'il les verse dans sa cavité. Ceci est conforme à l'ancienne théorie.

» 6°. Ces matériaux passent à mesure à travers les parois de cet organe de sécrétion, et en dehors de ces parois dans le canevas tubuleux de la substance principale, dont la forme et les dimensions sont déterminées pour chaque dent, et limitées, d'un côté, par la membrane qui tapisse les parois de la cavité du noyau pulpeux, et de l'autre par celle qui se trouve plus tard enveloppée par l'émail de la couronne. Ces deux membranes sont continues et forment une poche renfermant ce canevas tubuleux de la dent, et plus tard toute la substance tubuleuse.

» 7°. L'arrangement des matériaux de la dent, sécrétés par le bulbe, n'est

donc pas une simple transsudation de ces matériaux par couches, dont la première se ferait dans le vide de la capsule dentaire, entre le bulbe et la membrane émaillante, et dont les autres se placeraient successivement dans la précédente, en se moulant simplement autour de la surface du bulbe.

» 8°. Cet arrangement est déterminé par la forme, le nombre et la direction des tubes nutritifs qui composent la partie dentaire du bulbe, et qui se chargent de ses matériaux.

» 9°. La substance principale des dents ne paraît contenir aucun vaisseau sanguin en activité. En cela, elle diffère essentiellement des os.

» Les dents, ne recevant pas de sang dans leur substance tubuleuse, prennent dans le noyau pulpeux leurs matériaux nutritifs.

» La moelle des os pourrait tout au plus être comparée à la substance du noyau pulpeux, ainsi que l'ont fait MM. Retzius et Owen. Ce dernier appelle canal médullaire unique ce noyau pulpeux d'une dent de mammifère.

» 10°. Les dents simples, une fois durcies, ne croissent pas par développement, quoique se nourrissant par intussusception; la couche de matière inerte et cristalline qui revêt leur couronne en est une démonstration incontestable. Ce développement donnerait nécessairement plus d'extension à la surface recouverte par l'émail, le fendrait et le détacherait indubitablement.

» 12°. L'accroissement et le durcissement des dents par intussusception ont conséquemment, par cette circonstance et par l'absence de vaisseaux sanguins dans leur substance principale, deux circonstances organiques essentielles qui les distinguent de ceux des os.

» On ne saurait assez signaler la dernière, l'absence de vaisseaux sanguins dans la substance tubulée; elle constitue une différence de structure entre cette substance et les os, riche en conséquences physiologiques, sur lesquelles nous reviendrons en parlant du cément.

» 13°. La partie glanduleuse d'un bulbe dentaire, dans une dent dont l'accroissement est borné, est d'autant plus petite que cet accroissement est plus rapproché de son terme.

» Le canevas de substance tubulée qui fait partie de ce même bulbe se durcit rapidement, et sans qu'il reste de traces d'intermittences ou de périodes de ce durcissement et de l'accroissement du bulbe, par des couches apparentes des sels calcaires qui auraient été déposées successivement.

» Au contraire, dans une dent dont l'accroissement est pour ainsi dire sans limites, telle qu'une incisive de Rongeur ou une défense d'éléphant, la partie glanduleuse du noyau pulpeux reste toujours considérable, et celle

qui devra former successivement le canevas de la dent ne peut manquer de se développer, à mesure que celle qui l'a précédée a été durcie. Il y a, à cet égard, une succession de développements et de durcissements qui fait comprendre les couches successives de ces dents et les cônes emboîtés les uns dans les autres, qui sont si évidents dans les défenses fossiles d'éléphant. »

Après la lecture du Mémoire de M. *Duvernoy*, M. **Serres** fait observer à son confrère que, pour compléter la savante analyse qu'il a faite des travaux publiés sur la structure des dents, il aurait pu mentionner, après ceux de M. Richard Owen, les recherches sur le même sujet de M. Nasmyth, membre du collége des chirurgiens de Londres.

M. **Duvernoy** répond immédiatement qu'il s'empressera, à la prochaine lecture de la suite de son travail, de remplir, à l'égard de M. Nasmyth, la lacune, dans la partie historique de son Mémoire, que son honorable collègue vient de lui indiquer.

M. **Dumas** met sous les yeux de l'Académie deux échantillons d'empierrements exécutés au moyen du rouleau compresseur de M. Schattenmann. Dans un de ces échantillons, du sable a été employé pour remplir les interstices des fragments de pierre; dans l'autre, des débris de carrière ont été employés au même usage, et paraissent avoir déterminé une cohésion, plus complète.

Principes d'Organogénie, formant le premier volume d'un Précis d'Anatomie transcendante appliquée à la Physiologie; *par* M. **Serres**.

« J'ai l'honneur de présenter à l'Académie l'ouvrage que je viens de publier, intitulé : *Principes de l'Organogénie,* contenant l'exposé des règles que suivent les organismes de l'homme et des animaux dans le cours de leur développement.

» L'idée que les organismes de l'homme et des animaux sont semblables à eux-mêmes, à toutes les périodes de leur existence, est déjà loin de nous.

» L'idée contraire, ou celle qui les suppose différents aux époques principales de leur formation, a surmonté enfin les obstacles de diverses natures qui rendaient si difficile sa réalisation.

» Personne ne croit plus maintenant que l'embryon soit une miniature de l'animal parfait. Tous les anatomistes de nos jours s'accordent pour reconnaître qu'il ne parvient à ce dernier état qu'après avoir traversé des

états primitifs et secondaires qui lui servent en quelque sorte d'échelons.

» La science est unanime sous ce rapport; elle ne l'est pas encore concernant les règles que suivent, en se développant, les divers organismes. Mais, le fait capital étant hors de doute, les physiologistes ne peuvent tarder à s'accorder sur le mode d'après lequel il s'accomplit.

» La modification importante introduite par les professeurs du Muséum dans le programme de la chaire d'anatomie humaine de cet établissement est surtout de nature à favoriser ce résultat.

» Si, jusqu'à ces derniers temps, l'enseignement de l'anatomie de l'homme était presque resté étranger aux progrès immenses de la zoologie et de l'anatomie comparée, les professeurs du Muséum, et particulièrement mon prédécesseur M. Flourens, ont parfaitement compris qu'il était nécessaire de la mettre au niveau de l'état de ces sciences naturelles. C'est aussi ce que je me suis efforcé de suivre depuis trois ans que je suis chargé de cet enseignement.

» Mais, nul ouvrage ne présentant la science physique de l'homme sous l'aspect d'après lequel j'ai dû l'envisager au Muséum, plusieurs des personnes qui m'ont fait l'honneur d'assister aux leçons ont pensé qu'il pouvait être utile d'en publier un sommaire, soit pour faciliter l'intelligence à notre jeunesse studieuse, soit pour lui servir de guide dans le mouvement rapide imprimé dans ces dernières années aux sciences anatomiques et physiologiques. Telle est l'origine de la publication de cet ouvrage, tel est le but que je me propose d'atteindre.

» Ainsi que l'indique l'avertissement placé en tête de ce volume, sa publication est due à la bienveillance des savants éditeurs de l'*Encyclopédie nouvelle*; à celle surtout de M. Jean Reinaut, dont les immenses connaissances m'ont été si profitables. »

M. Piobert fait hommage à l'Académie d'un exemplaire de la partie théorique du *Cours d'Artillerie* qu'il a été chargé de créer, en 1831 et 1832, à l'École d'Application de l'Artillerie et du Génie. « Dans ce cours, qui depuis lors fait partie de l'enseignement de cette École, toutes les questions ont été traitées, pour la première fois, en ne s'appuyant que sur l'expérience, ou sur des théories constamment déduites des faits et dégagées de toute hypothèse. La plupart des considérations nouvelles qui sont développées dans cet ouvrage ne sont pas exclusivement relatives au service de l'artillerie; presque tous les résultats obtenus sont susceptibles de nombreuses applications et peuvent être avantageusement utilisés dans diverses

questions importantes de mécanique. On y détermine les effets utiles de la force expansive des fluides élastiques, les effets destructeurs de ces agents énergiques et la résistance dont sont susceptibles les enveloppes qui servent à les contenir. Les principes raisonnés de construction des voitures, des roues et des essieux y sont développés, tant sous le rapport de la solidité que sous celui du tirage qui est nécessaire pour mouvoir les véhicules; enfin la force de traction du cheval et des autres animaux de trait est traitée d'une manière nouvelle, qui rend parfaitement compte de tous les effets observés dans la pratique.

» La rédaction de cette partie du cours d'artillerie, lithographiée à Metz en 1841 et revue en entier depuis cette époque, a été faite d'après les cahiers manuscrits et les leçons orales de M. Piobert pendant l'année 1835, par deux officiers très-distingués qui furent désignés alors pour le suppléer et le remplacer comme professeur; des vingt-huit leçons dont l'ouvrage se compose, M. Didion a rédigé les deux premières et M. de Saulcy les vingt-six autres. »

M. le **Président** invite la Section d'Astronomie à présenter une liste de candidats pour une des deux places de correspondant vacantes dans cette Section.

MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

PHYSIQUE APPLIQUÉE. — *Sur les moyens par lesquels on peut obtenir la précipitation du bronze dans les opérations galvano-plastiques;* par M. de **Ruolz**.

(Commission précédemment nommée pour diverses communications relatives à la précipitation des métaux au moyen des courants électriques.)

« L'intérêt avec lequel l'Académie a daigné accueillir mes premiers travaux me fait espérer qu'elle ne considérera pas leur continuation comme entièrement indigne de son attention.

» *Précipitation galvanique du bronze.* — 1°. Le Rapport fait à l'Académie sur mes recherches, au nom de la Commission des prix Montyon, par son illustre président, M. Dumas, contenait (à l'occasion de la possibilité de précipiter galvaniquement non-seulement des métaux simples, mais encore des alliages) la phrase suivante : « C'est un point de vue dont M. de Ruolz » ne s'est pas occupé, mais que nous recommandons à son zèle et à sa » pénétration. » En me laissant un souvenir de respectueuse reconnais-

sance, cette phrase m'a paru l'expression d'un ordre à exécuter, l'indication d'un devoir à remplir.

» Déjà les ingénieuses applications de l'électro-chimie à la métallurgie, faites par M. Becquerel, rendaient le succès probable. En persistant dans mes recherches, j'ai cru devoir m'attacher principalement à l'alliage le plus important peut-être par ses nombreuses applications aux arts, celui dont des siècles d'expérience ont garanti les avantages sous le double rapport de la durée et de l'effet artistique, l'alliage des bouches à feu, le *bronze*.

» *Lois de la précipitation simultanée.* — Il résulte de mes recherches que, pour obtenir galvaniquement la précipitation simultanée de deux métaux, il faut remplir les conditions suivantes :

» 1°. Que les deux dissolutions métalliques qu'il faut mélanger ne soient pas susceptibles de se décomposer réciproquement en donnant lieu à un composé insoluble quelconque;

» 2°. Que, dans les proportions à adopter, il ne faut pas avoir égard seulement aux quantités relatives des deux métaux qui constituent l'alliage que l'on veut obtenir, mais encore à la loi de précipitation de chaque métal pris individuellement, ou à la puissance électrique nécessaire pour précipiter, dans un temps x, une quantité donnée de chacun d'eux.

» Ainsi, dans le cas qui nous occupe, pour obtenir un alliage composé de cuivre 90, étain 10, il faut employer une dissolution contenant ces deux métaux dans des proportions toutes différentes.

» En effet, les divers échantillons de fer *bronzé* que j'ai l'honneur de soumettre à l'Académie, et qui, d'après les analyses que j'ai pratiquées sur des pièces analogues, contiennent, comme l'alliage des bouches à feu, 10 à 20 pour 100 d'étain, ont été obtenus en faisant agir la pile à courant constant sur une dissolution ainsi composée : Prenez eau 5000 p.; faites-y dissoudre assez de cyanure de potassium pour marquer 4 degrés au pèse-sel, la température étant de $+ 25^\circ$ centigr. Faites dissoudre dans cette liqueur, à une température de $+50$ à $+60^\circ$ centigr., 30 p. de cyanure de cuivre sec; puis faites dissoudre à la même température 10 p. de bioxyde d'étain. Une partie de l'étain, réduite à l'état métallique, apparaîtra sous forme d'une poudre noire; le reste se dissoudra, non pas, telle est notre pensée, à l'état de cyanure double, mais à l'état de stannate de potasse, à la faveur de l'excès d'alcali contenu dans la solution de cyanure de potassium.

» Nous pensons que cette application pourra offrir de l'intérêt pour tous les objets de serrurerie en fer auxquels le cuivrage ne convient pas sous le double rapport de la couleur désagréable du cuivre rouge et de l'altérabi-

lité de ce métal, ainsi que pour un grand nombre d'objets d'art en fonte de fer.

» *Plombage.* — 2°. N'ayant rien changé aux procédés de plombage que nous avons déjà eu l'honneur de soumettre à l'Académie, nous ne les décrirons pas ici. Nous lui adressons un tuyau en fer recouvert, à l'intérieur comme à l'extérieur, de 2 kilogr. de plomb. Nous pensons que cette application peut offrir un grand avantage pour la conservation des tuyaux de conduite d'eau, ainsi que pour certaines grosses pièces de machines, notamment des machines à vapeur des paquebots, exposées à l'action délétère de l'eau de mer. Le peu de facilité avec laquelle le plomb est attaqué par les divers agents chimiques offre à cet égard toute chance de succès.

» Nous joignons des échantillons d'ardoises en tôle fortement plombée; elles sont taillées sur le modèle des ardoises ordinaires, et leur légèreté permet de les mettre aux lieu et place de ces dernières sans être obligé de modifier le système de toiture des bâtiments.

» *Étamage.* — Nous avons aussi l'honneur d'adresser à l'Académie un morceau de corniche en fonte de fer recouvert d'une forte couche d'étain. La beauté de cet échantillon nous fait penser que l'on pourrait appliquer ce procédé à une foule d'ornemens de ce genre, en les préservant des effets délétères de l'air et de l'humidité.

» *Examen comparatif du zingage et du plombage ou étamage.* — Nous terminerons par quelques considérations sur le zingage comparé aux deux applications dont nous venons de parler.

» Nos recherches à cet égard nous ont conduit aux résultats suivants :

» 1°. Le zingage galvanique est industriellement inapplicable aux grosses pièces, vu la dépense énorme de force électrique qu'il exige : on en jugera par ce fait que, tandis que l'action de 6 éléments de notre pile a suffi pour déterminer le dépôt de 2 kilogr. de plomb sur le tuyau en fer que nous présentons ici, un tuyau tout semblable, soumis à l'action de 300 éléments de la même pile, n'a pris, dans le même temps, que 500 grammes de zinc.

» 2°. Le zinc, par son contact avec le fer, devient positif; mais l'influence préservatrice qui en résulte ne s'exerce que dans un très-petit rayon, de telle sorte qu'une pièce étant zinguée, si une partie de fer se trouve mise à nu, cette partie se rouille avec autant de rapidité que si la pièce n'était pas zinguée sur le reste de sa surface. Nous avons fait à cet égard des épreuves réitérées.

» 3°. Le zinc est par lui-même un métal facilement attaquable, et, sous ce rapport, très-inférieur à l'étain et surtout au plomb, auxquels il est facile

d'ailleurs, par les motifs déjà exposés, de donner une épaisseur beaucoup plus grande.

» 4°. Les inconvénients du zingage par immersion dans un bain de zinc fondu sont connus, et le Rapport de l'illustre académicien que nous avons déjà cité nous dispense de détails à cet égard.

» *Conclusions de cette comparaison.* — Par suite de tous ces motifs, nous sommes convaincus que, comme moyen préservatif du fer et de la fonte, le plomb (ou l'étain suivant les cas) doivent être préférés au zinc.

» *Prix peu élevé du plombage.* — Nous ajouterons que le prix du plomb est beaucoup moins élevé que celui du zinc, et que nous pouvons l'appliquer en augmentant très-peu la valeur du métal déposé. En effet, nous employons une dissolution de litharge dans la potasse; cette dernière n'étant pas décomposée, le bain une fois fait peut servir indéfiniment et se trouve entretenu constamment au même état de saturation, soit en employant comme pôle positif une large feuille de plomb qui se dissout en quantité équivalente au plomb précipité, soit en rechargeant le bain de litharge à mesure qu'il s'épuise. La main d'œuvre est nulle, et l'on a vu que la dépense d'électricité est minime.

» *Question des boulets.* — Nous ajouterons que le plombage nous paraîtrait pouvoir s'appliquer avec avantage à la conservation des boulets, qui s'altèrent en mer, ne sont plus de calibre, et que l'on est dans l'usage, au retour des expéditions longues, de recouvrir *mécaniquement* d'un fourreau de plomb, moyen infiniment plus dispendieux que celui que nous proposons. Resterait même, peut-être, à examiner si, par suite de la flexibilité du plomb et de l'action qu'exercerait sur lui le refouloir en faisant remplir hermétiquement l'âme de la pièce, la force d'impulsion ne serait pas augmentée. »

M. Challuau adresse un Mémoire ayant pour titre : *Notice sur le calcul des surfaces des plans : nouvelle méthode et nouvel instrument destinés à rendre cette opération tout à la fois plus expéditive et plus exacte.*

(Commissaires, MM. Puissant, Mathieu.)

M. Barruel soumet au jugement de l'Académie une *Note sur la Composition des bagasses.*

(Commissaires, MM. Chevreul, Dumas, Pelouze.)

L'Académie reçoit deux communications relatives aux *télégraphes de nuit*, adressées l'une par M. A. BRACHET, l'autre par M. COCCIOLO.

(Commission nommée pour le télégraphe de nuit de M. Vilallongue.)

M. LEROY D'ÉTIOLLES envoie une Note additionnelle à ses précédentes communications sur les *moyens de diminuer les dangers des chemins de fer*.

(Commission des chemins de fer.)

M. TAVERNA envoie un supplément à un Mémoire qu'il avait précédemment présenté sur l'emploi des *essieux brisés*.

(Commission précédemment nommée.)

CORRESPONDANCE.

M. LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE autorise l'Académie à joindre à la somme destinée au grand prix des Sciences physiques de l'année 1843 celle qui était affectée au concours de 1841, concours pour lequel aucun Mémoire n'avait été présenté. La valeur du prix qui sera décerné, s'il y a lieu, en 1843, sera ainsi de 6000 francs.

M. LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE prie l'Académie de lui faire connaître son opinion sur l'utilité de divers instruments de physique et de météorologie demandés par un voyageur, M. *de Castelnau*, qui se propose de visiter une partie de l'Amérique intertropicale.

Une Commission composée de MM. Arago, Mathieu et Babinet, est chargée de faire un Rapport en réponse à la demande de M. le Ministre.

M. WHEATSTONE, récemment nommé à une place de correspondant, adresse ses remercîments à l'Académie.

PHYSIQUE DU GLOBE. — *Observation sur le glacier de l'Aar*. — Extrait d'une Lettre de M. AGASSIZ à M. *Arago*.

« Depuis huit jours je suis de nouveau établi sur le glacier de l'Aar, avec plusieurs de mes amis qui m'aideront à poursuivre les nombreux phéno-

mènes qui s'y présentent, et dont l'étude semble devenir de plus en plus difficile et plus compliquée à mesure que les observations se multiplient. Je profite d'un jour de repos pour vous rendre compte de quelques résultats que nous avons déjà obtenus, et que je désire communiquer à l'Académie.

» Un premier fait qui m'a vivement intéressé, c'est l'avancement progressif de ma cabane, qui a marché de 207 pieds (mesure suisse) depuis le mois de septembre de l'année dernière. Quatorze années d'observations sur la marche du glacier de l'Aar, faites d'abord par M. Hugy sur sa cabane, depuis 1827 jusqu'en 1836, et que j'ai continuées depuis sur un bloc situé 2000 pieds plus haut, ont donné pour moyenne de la marche annuelle de ce glacier 220 pieds. Loin d'accélérer sa marche en descendant, il paraît que la partie inférieure du glacier marche plus lentement que la partie supérieure. Je n'ai pas encore des observations assez nombreuses pour pouvoir fixer la vitesse de cette progression par mois, par jours, de jour et de nuit; mais j'espère y arriver cette année. Ce que je puis annoncer positivement dès à présent, c'est que le glacier est immobile en hiver: je n'en citerai pour le moment d'autre preuve que la continuité de la neige qui recouvre sa surface et les parois de rochers entre lesquelles il est encaissé; s'il en était autrement, il se formerait des déchirures dans la neige entre le glacier et le rocher. Ce fait est une objection capitale contre l'opinion de Saussure, qui pensait que le mouvement du glacier était dû à la fonte de la surface inférieure par l'effet de la chaleur propre de la terre.

» Un autre fait très-curieux et peu connu, c'est l'ablation de la surface du glacier. Depuis deux ans je m'étais assuré que, pendant l'été, la surface du glacier s'abaissait de 6 à 7 pieds, sans que pour cela son niveau absolu diminuât. J'avais même remarqué, en 1841, que, malgré une ablation de 7 pieds de glace, le niveau de la surface du glacier s'était considérablement élevé. J'attribuai ce phénomène extraordinaire à la congélation de l'eau qui s'infiltre continuellement dans la masse du glacier, et qui le dilate dans tous les sens; mais, pour mettre ce fait hors de doute, je fis diverses expériences dont les principales sont les suivantes : Je fis faire plusieurs trous de sonde de différents diamètres et à différentes profondeurs, et je mesurai matin et soir la quantité d'eau accumulée dans chacun d'eux; je m'assurai par là qu'il s'infiltre une quantité d'eau beaucoup plus considérable dans le glacier de jour que de nuit, et que cette quantité est proportionnelle aux surfaces des trous dans lesquels elle s'accumulait. Dans un Mémoire que j'ai rédigé ce printemps, et qui sera imprimé dans

quelque temps seulement, j'ai donné tous les détails de ces observations. D'un autre côté, afin de mesurer plus rigoureusement l'ablation de la surface, je fixai quatre perches dans des trous de sonde, et j'y marquai le niveau de la surface du glacier au commencement de septembre 1841; le 9 juillet de cette année-ci, je trouvai la marque de trois de mes perches à 3 pieds 7 pouces et celle de la quatrième à 3 pieds 5 pouces au-dessus de la surface. Pour mettre cette expérience en rapport avec la marche générale du glacier, j'avais en outre rempli un trou de sonde, de 140 pieds de profondeur, de gravier séparé de 9 en 9 pieds par des cylindres numérotés, de 1 pied de longueur. Le premier cylindre, qui était à 3 pieds au-dessous de la surface en septembre dernier, sortait de 6 pouces le 9 juillet 1842, au centre d'un cône graveleux; le 12 de ce mois il fut complétement dégagé. Si l'on peut conclure de ces trois années d'observations que l'ablation annuelle de la surface du glacier est de 5 pieds, on doit s'attendre à voir le cylindre du fond de ce trou reparaître à la surface du glacier, dans 27 ans, à 5940 pieds plus bas que l'endroit où il se trouve maintenant, la marche annuelle du glacier étant de 220 pieds. Si la masse d'un glacier ne se renouvelait pas continuellement par l'infiltration de l'eau, tout glacier de 6000 pieds de long devrait avoir au moins 140 pieds d'épaisseur à son origine; or j'en ai mesuré un hier qui a environ 4000 pieds de longueur, dont l'épaisseur n'est pas de 50 pieds à son origine, et qui n'est pas sensiblement plus mince à son extrémité inférieure.

» Étant arrivé cette année un mois plus tôt (le 9 juillet) sur le glacier que l'année dernière, j'ai pu comparer son aspect à ces deux époques. J'ai été frappé de l'apparence bosselée de toute sa surface à une certaine distance des moraines : ces bosses ont de 2 à 3 et même 4 pieds de haut; leur sommet est irrégulièrement arrondi, et entre elles il y a de nombreuses petites flaques d'eau. On ne remarque encore aucune trace des bandes blanches et des bandes bleues dont se compose la glace des glaciers à la surface de ces bosses; on en aperçoit quelques indices seulement au fond des flaques d'eau. En revanche, le haut des bosses est fissuré profondément dans la direction longitudinale du glacier, et ces fissures sont rectilignes, et souvent très-nombreuses et très-serrées. J'ai pu me convaincre que ces fissures correspondent aux bandes bleues de l'année dernière, désagrégées par l'action de la chaleur; j'en ai eu la preuve directe en découvrant une partie de la moraine, dont la glace, préservée de l'influence des agents atmosphériques par le gravier et les cailloux qui la composent, a pris, après quelques heures d'exposition, exactement le même aspect que la glace bosselée du milieu du glacier, et s'est fissurée dans le même sens, par la disparition des bandes

bleues. Le long des moraines les bandes bleues sont très-visibles; la surface de la glace est unie dans cet endroit, et continuellement humectée par l'eau qui découle des moraines et par les nombreux ruisseaux qui proviennent de la fonte des neiges supérieures, de l'épuration du névé et de l'écoulement des crevasses. La quantité d'eau accumulée dans ce moment sur le glacier et dans sa masse paraît énorme; toutes les crevasses de sa partie supérieure sont complétement pleines, celles du milieu de son cours sont à peine à moitié vides, celles de son extrémité inférieure seules sont complétement vides. Ce fait, et la présence de plusieurs petits lacs sur les bords du glacier, me paraissent prouver que l'eau du glacier s'écoule en s'infiltrant dans la masse comme dans une éponge, et non point en tombant par les crevasses au fond de son lit. Je me suis assuré de l'étendue de cette infiltration et de son activité en introduisant des matières colorantes dans les trous de sonde, et je me suis convaincu qu'elle a lieu beaucoup plus rapidement dans les bandes bleues que dans la glace blanche. Enfin j'ai pu constater que les bandes bleues sont de la glace d'eau congelée par lames verticales dans le névé lorsqu'il s'épure, et qui se maintiennent en s'agrandissant et en subissant diverses modifications dans le cours du glacier; tandis que la glace blanche est le résultat du mélange du névé et de l'eau qui, en se congelant ensemble, forment un poudingue de neige grenue, d'air et d'eau. L'aspect de la glace qui s'est formée l'hiver dernier dans les différents trous que j'avais faits l'été précédent dans le glacier m'a prouvé que la glace bleue est réellement de la glace d'eau pure. Vouloir attribuer la formation des bandes bleues à un phénomène de pression, c'est faire de la théorie, sans tenir compte des faits.

» Je communiquerai plus tard à l'Académie les résultats des observations que je poursuis maintenant; l'étude des phénomènes du glacier est trop difficile et les circonstances dans lesquelles on peut s'y livrer trop pénibles pour qu'on puisse arriver à leur solution en peu de temps. Les mouvements longitudinaux des glaciers sont maintenant suffisamment connus; mais les déplacements latéraux de la masse n'ont point encore été observés; pour parvenir à les apprécier, l'un de mes compagnons de voyage, M. Wild, est occupé à faire une carte générale du glacier et des plans détaillés des points les plus importants, où tous les blocs et toutes les crevasses seront indiqués, afin de pouvoir constater à la fin du mois prochain, et derechef l'année prochaine, les moindres changements qu'ils auront subis. M. Wild est l'un des ingénieurs qui ont mesuré la base de la triangulation de la Suisse, en sorte que son travail méritera toute confiance.

Nous avons aussi un laboratoire de chimie et de physique à côté de notre cabane, pour analyser la glace et l'air du glacier et étudier les moindres phénomènes qu'il peut importer de connaître pour arriver à une connaissance complète des glaciers. Dès que ces travaux seront achevés, j'aurai l'honneur de faire parvenir à l'Académie un résumé des principaux résultats que nous aurons obtenus. »

PHYSIQUE. — *Extrait de deux Lettres de* M. MATTEUCCI *à* M. Arago, *sur la phosphorescence des corps.*

« ..... Dans mes recherches sur la phosphorescence, j'ai tiré grand parti d'un papier que j'ai appelé *phosphoroscopique*, et qui se prépare tout simplement en répandant uniformément avec un tamis la matière phosphorescente sur du papier mouillé avec une solution de gomme arabique. Ce papier est très-sensible à l'action de la lumière solaire, de l'étincelle électrique et des différentes flammes. J'ai pu très-bien établir qu'avec le phosphore de Canton, la phosphorescence n'est excitée que par les rayons *violet* et *indigo* d'un spectre obtenu avec un prisme de verre assez bon : j'ai trouvé le même résultat avec un prisme d'eau. Le rayon solaire qui passe à travers une lame de quartz ($0^m,003$) avant d'arriver sur le prisme, porte la phosphorescence jusqu'aux rayons *bleus;* alors le maximum est dans le violet, près de l'indigo.

» J'ai essayé le passage de la lumière à travers différents corps. Ceux qui parmi les solides laissent passer le mieux les rayons produisant la phosphorescence sont : l'alun, le quartz, le sel gemme; ceux qui les arrêtent le plus sont : le mica, même très-mince, et la tourmaline.

» J'ai réuni un très-grand nombre de faits qui prouvent que la transparence ne doit pas être confondue avec la propriété qu'ont les corps de laisser passer les radiations phosphorescentes. L'ordre dans lequel les corps peuvent être disposés quant à la propriété qu'ils ont de laisser passer les rayons phosphorescents n'est pas le même pour les différentes sources de lumière.

» Le passage des rayons solaires à travers certains corps favorise le passage des rayons phosphorescents qui y sont amenés par d'autres corps.

» J'ai été beaucoup aidé, dans ces expériences, longues et minutieuses, par deux de mes élèves très-distingués, le jeune Ridolfi et le docteur Cima de Cagliari.

» Pise, le 24 juin 1842. »

« . . . J'ai dirigé mes nouvelles recherches sur le moyen de déterminer le temps qui est nécessaire pour exciter la phosphorescence à l'aide d'un rayon solaire. Voici ma méthode : j'ai introduit la lumière solaire dans une chambre obscure, en la faisant réfléchir par une glace étamée; le trou du volet avait 15 millimètres de diamètre. A 20 centimètres de ce trou j'ai fait tomber cette lumière sur un disque de fer-blanc qui était fixé par son axe à un mouvement d'horlogerie; ce disque avait tout près de ses bords un trou rond de 10 millimètres. Derrière ce disque on avait fixé, à 10 centimètres, un support sur lequel pouvait se fixer le papier phosphoroscopique; un observateur se tenait renfermé dans une chambre obscure, et recevait des mains d'un aide le papier phosphoroscopique, par l'intermédiaire d'une espèce de tiroir. J'ai tâché de trouver la vitesse de rotation qu'il fallait donner au disque pour avoir la phosphorescence excitée *par un seul passage;* il était facile de calculer le temps employé pour parcourir le diamètre du trou, et par conséquent la durée de l'impression. J'ai vu très-aisément qu'en donnant au disque une vitesse de rotation toujours plus rapide, on arriverait à une limite où, par une seule impression, la phosphorescence n'était pas excitée; j'ai trouvé pour limite, dans mon cas, trente centièmes de seconde de temps ($0^s,30$). La phosphorescence ainsi excitée ne dure qu'une très-petite fraction de seconde. Je crois que la durée nécessaire pour exciter la phosphorescence doit être encore moindre que je ne l'ai trouvée : avec un temps d'excitation au-dessous de $0^s,30$, la phosphorescence ne persiste pas assez pour pouvoir être observée. Quand la vitesse augmentait, il fallait un certain nombre d'impressions, toujours de plus en plus grandes, pour rendre la lumière sensible : cela prouve que la matière acquiert de l'activité, et que ce qui est acquis dans une impression n'est pas perdu à une seconde si elle la suit de près. Toutes ces expériences ont été faites avec le papier phosphoroscopique de Canton. Voici encore des résultats très-curieux obtenus avec le papier rendu phosphoroscopique avec le phosphore de Bologne.

» Avec ce premier phosphore, je n'ai obtenu que cette différence : le verre vert léger et le verre blanc laissent passer le mieux les vapeurs qui excitent la phosphorescence; avec le second phosphore, l'alun est le corps qui laisse le moins passer les rayons phosphorescents : l'alun devient inférieur au quartz, au sel gemme et au sulfate de chaux. Ce papier phosphoroscopique de Bologne, exposé au spectre solaire obtenu avec le prisme de verre et dans les mêmes conditions qu'avec l'autre papier, donne le maximum de phosphorescence dans la bande *bleu vert;* si l'on prolonge

l'expérience au-delà d'une minute ou deux, suivant la clarté du jour, on voit la phosphorescence dans tout le spectre, mais toujours avec le maximum dans le même endroit. On voit cela également en tenant note de la durée de la phosphorescence : il reste à voir si un rayon réfléchi a plus ou moins d'activité que le rayon direct.

» Pise, 18 juin 1842. »

MÉTÉOROLOGIE.— *Observations de pluie par un temps serein.* — Extrait d'une Lettre de M. WARTMANN à M. *Arago.*

«... Le 11 mai dernier, à $10^h 3^m$ du matin, temps moyen, le ciel bleu et parfaitement pur ne laissait apercevoir aucun nuage visible sur l'horizon; l'air était calme; le baromètre de l'Observatoire, réduit à zéro, marquait dans ce moment $730^{mm},5$; le thermomètre centigrade à l'air libre, $+9°,3$, et l'hygromètre à cheveu, 70°. Je me trouvais dans la rue de l'Hôtel-de-Ville (non loin de l'Observatoire), bordée à droite et à gauche de maisons assez élevées, quand tout à coup je fus surpris par une ondée inattendue et abondante au point de mouiller complétement le pavé de la rue dans toute sa longueur; je levai aussitôt les yeux vers le ciel, qui était du plus bel azur au-dessus de ma tête, et d'où je vis descendre, dans une direction parfaitement verticale et pendant cinq minutes et trois quarts, une pluie formée de gouttes larges et chaudes qui provenaient d'une région fort élevée, ainsi que j'ai pu l'apprécier par le brillant éclat que les rayons solaires communiquaient à chaque goutte, éclat qui les rendait assez distinctes pour être visibles à une grande distance.

» Le même jour, 11 mai à 3 heures après midi, il y a eu une répétition du même phénomène. Comme je traversais la place de Bel-Air, je fus témoin d'une pluie par un ciel parfaitement serein, dont les gouttes, peu serrées mais larges et tièdes, tombaient verticalement. Cette pluie présenta trois intermittences remarquables. Après une averse de trois quarts de minute de durée, le phénomène cessa pendant une demi-minute, puis il recommença tout à coup avec autant d'intensité que la première fois et dura une minute; il fut de nouveau suspendu pendant cinquante secondes, après quoi il y eut encore une nouvelle chute spontanée de gouttes fort larges et assez serrées qui avaient une légère *odeur électrique,* analogue à celle que M. Schœnbein désigne sous le nom d'ozon. Cette dernière chute se prolongea deux minutes.

» L'air, pendant l'accomplissement du phénomène, était parfaitement

calme; le baromètre de l'Observatoire, réduit à zéro, marquait $727^{mm},61$; le thermomètre centigrade à l'air libre, + 13°, et l'hygromètre à cheveu, 67°; il n'y avait aucun nuage visible sur toute l'étendue du ciel. Le matin, à 8 heures, un léger zéphyr soufflait dans la direction de l'est-nord-est, l'après-midi il passa un moment au nord-nord-ouest, puis, à 8 heures du soir, il tourna au sud-sud-ouest; mais, à 10 heures du matin, à 3 heures après midi et à 9 heures du soir, un calme plat régnait dans l'air.

» M. Bruderer, astronome adjoint à l'Observatoire, a aussi remarqué, non sans surprise, quelques minutes après 3 heures, de la place Maurice qu'il traversait pour se rendre à l'Observatoire, une pluie instantanée à larges gouttes qui se reproduisit plusieurs fois en moins d'un quart d'heure, quoique le ciel fût parfaitement pur, sans vapeurs et sans nuages. Ce fait met hors de doute que cette pluie s'est étendue à la fois sur une grande surface, puisque M. Bruderer était situé dans un quartier assez éloigné de celui où je me trouvais, et nous n'occupions sans doute ni l'un ni l'autre les limites du sol arrosé.

» Une circonstance qui mérite de fixer l'attention des météorologistes, c'est que la pluie par un ciel serein, observée le 21 avril dernier par M. Bodson de Noirfontaine, et celle du 2 mai suivant, observée par M. Babinet, consistaient, selon la description que ces savants en ont donnée, en gouttes *très-fines* et *très-froides*, tandis que celle dont je viens de vous entretenir, qui a eu lieu à Genève le 11 du même mois de mai, était formée de gouttes *très-larges* et *tièdes*, et tout à fait analogue à celle que votre illustre ami, M. de Humboldt, observa autrefois sous une latitude bien différente de celle de la Suisse. »

MÉTÉOROLOGIE. — *Sur la forme de quelques éclairs; par* M. **J. Fournet**, professeur à la Faculté des Sciences de Lyon.

« Dans son beau travail sur le tonnerre, M. Arago distingue quatre formes différentes dans les émanations électriques des nuages, savoir : 1° les éclairs linéaires, minces, arrêtés sur les bords et cheminant en zig-zag avec une énorme vitesse; 2° les éclairs diffus et couvrant de grandes surfaces nuageuses; 3° les feux circonscrits en forme de globes, dans lesquels la matière électrique est en quelque sorte condensée, et dont le mouvement de progression s'effectue avec une certaine lenteur; enfin, 4° les lueurs d'apparence phosphorique qui persistent pendant quelque temps sur les bords ou sur tout l'ensemble de certains nuages. On conçoit que,

pour arriver à saisir les causes de ces diverses manières d'être, il convient de savoir si elles doivent être considérées comme formant des types entièrement indépendants, ou bien s'il n'y aurait pas divers passages des unes aux autres; les faits que je vais citer me paraissent venir à l'appui de cette dernière supposition.

» A la suite des fortes chaleurs et des journées pures des 14, 15 et 16 juillet 1842, on vit, dans la matinée du 17, à Chessy, les préliminaires habituels des orages, c'est-à-dire ces gros *cumuli* simulant des rochers verticaux et stationnant au-dessus des montagnes de l'ouest. La chaleur continuait à être très-forte, car, à 2 heures du soir, le thermomètre centigrade, à l'ombre, s'élevait à 32°,5, et le même instrument, enveloppé d'une étoffe noire, indiquait 42°,5. A 3 heures et demie, les nuages commencèrent à s'aplanir sous un vent d'ouest, et finalement, à quatre heures, le sud-ouest ayant pris le dessus, une ondée de courte durée et des éclairs jaillirent d'une colonne nuageuse grise, établie du Pererat à Chessy. Cette colonne ne dépassait pas le zénith de la limite des plaines lyonnaises, parce que son extrémité se dissolvait au fur et à mesure qu'elle y arrivait, se trouvant alors sous l'influence d'un vent du nord, qui d'ailleurs balaya le tout vers les 7 heures du soir.

» Durant cette dernière période de l'orage du jour, il y eut parmi les éclairs diffus un grand nombre d'éclairs linéaires, les uns courbés en arcs de cercle, les autres bifurqués; et, ce qui est encore bien digne de remarque, c'est que ces traits se dirigeaient pour la plupart par le travers de la colonne depuis son bord septentrional vers son bord méridional, comme si le vent du nord qui régnait indépendamment du sud-ouest avait occasionné cette allure.

» Après l'éclaircie précédente, à 8 heures du soir, survint la seconde période de l'orage qui se développa plus largement que la précédente. Deux colonnes de nuages gris étaient placées parallèlement, l'une, comme précédemment, du Pererat à Chessy, l'autre du Boucivre à Sainte-Paule. La première ne versa point de pluie, demeura encore une fois stationnaire, tandis que l'autre répandit une très-forte averse à Tarare, chemina rapidement vers le Beaujolais, où je la perdis bientôt de vue, et c'est hors de son sein que surgissaient les éclairs qui forment l'objet principal de ces observations.

» Ils appartenaient, en général, à la catégorie des éclairs diffus, illuminant de leurs lueurs rouges, tremblottantes, multipliées, des longueurs de trois à quatre lieues du flanc sud-est de la colonne, le seul que je pouvais

voir de ma station. Dans le nombre, il s'en trouva plusieurs qui, indépendamment de la forme indiquée ci-dessus, offraient un ou deux centres lumineux. Dans d'autres, la matière électrique, encore plus condensée et émanant toujours d'un éclair diffus, offrait de mon point de vue l'apparence d'une traînée de feu rouge qui s'élevait verticalement en ligne droite ou en courbes sinueuses. Ces dernières se jettaient encore du nord au sud, comme les traits vifs de l'orage de l'après-midi. Ce qui m'a surtout frappé dans ces jets, c'est qu'ils offraient la représentation la plus exacte possible de ces fusées simples qui surgissent de temps à autre du milieu de la clarté générale produite par un feu d'artifice. Ils différaient par conséquent des éclairs du second genre, avec lesquels ils faisaient corps, par une plus grande concentration du fluide électrique, et de ceux du premier genre par leur instantanéité, par leur lumière moins éblouissante, par leur marche rectiligne ou curviligne, sans zigzags à angles vifs, et enfin par leur forme raccourcie. Si donc je ne me trompe, ils indiquent un état intermédiaire entre ces deux types; et, dans tous les cas, j'aurai eu occasion d'observer, dans un seul et même orage, diverses formes nouvelles qu'il était bon de connaître.

» Avant de terminer, qu'il me soit encore permis d'ajouter que, parmi les éclairs diffus, on peut ranger une autre structure remarquable en ce qu'au lieu d'être plus ou moins allongée, elle est parfaitement circulaire, avec un noyau central très-éclatant, comme un soleil garni de ses rayons. Ces sortes d'éclairs émanent du flanc des colonnes orageuses les plus denses et les mieux agglomérées, et celles-ci semblent alors offrir une ouverture analogue à la bouche d'un canon au moment d'une explosion.

» Cette manière d'être, qui n'est pas très-fréquente, présente une assez grande ressemblance avec les centres lumineux de ma première forme d'éclairs, pour que je n'aie pas dû la passer sous silence dans cet exposé. »

MÉTÉOROLOGIE. — *Sur un météore lumineux observé le 3 juin à Montpellier.* — Extrait d'une Lettre de M. **Marcel de Serres** à M. *Arago*.

« Vendredi 3 juin, vers 9 heures 10 minutes du soir, un météore igné de la plus grande beauté a parcouru l'horizon dans les environs de Montpellier, dans la direction du sud-est au nord-ouest. Il s'est évanoui dans cette dernière direction, après avoir traversé la petite Ourse, le Dragon, la grande Ourse, le Lion, et avoir brillé quelques secondes.

» Les personnes qui l'ont aperçu l'ont comparé à une immense fusée

volante du plus grand éclat. Lorsque j'ai vu sa traînée lumineuse, j'ai cru que la maison de campagne auprès de laquelle j'étais assis était la proie d'un incendie aussi subit que violent. Sa clarté illuminait d'une vive lumière la plus grande partie de ma terrasse.

» Des personnes dignes de toute ma confiance, qui se trouvaient à Montpellier au moment de l'apparition de ce beau météore, ont attribué à la couleur de sa lumière une teinte blanchâtre, tandis que cette même nuance m'a paru rougeâtre à un quart de lieue de la ville.

» L'ignition de ce météore était si vive, que si sa chute avait eu lieu sur des matières combustibles elles auraient été certainement embrasées.

» Ce bolide a été vu à l'Observatoire de Toulouse, ainsi que dans une grande partie de l'Aveyron, à la même heure qu'à Montpellier. M. le général Lejeune, qui se promenait à cheval sur la route de Blagnac à Toulouse, a eu le temps de parcourir environ 50 mètres pendant la durée de l'apparition. Ces circonstances prouvent que cet astéroïde se trouvait à une grande hauteur au-dessus de la Terre; elles permettent de penser qu'il peut être passé près de nous sans tomber sur notre planète, malgré l'assertion de M. le docteur Flavard d'Aniane, qui prétend l'avoir vu se briser dans un lieu précis, au pied du bois de Brousse, près du pont Saint-Guilhem (Hérault).

» Ce météore n'a point d'importance minéralogique, mais il pourrait en avoir une astronomique, si plusieurs observateurs pouvaient indiquer quelques-unes des étoiles auprès desquelles il a passé. C'est ce que notre position ne nous a pas permis de faire au moment de son apparition. C'est donc pour appeler l'attention des astronomes sur cette circonstance, que nous avons cru utile, monsieur, de vous adresser ces observations, tout incomplètes qu'elles sont, en vous priant de les mettre sous les yeux de l'Académie. »

M. Martin Saint-Ange écrit relativement à la discussion qui a eu lieu entre MM. *Coste* et *Lesauvage* touchant *l'origine, le mode de formation et le développement de la caduque,* et relativement à la réclamation de priorité élevée par ce dernier pour quelques-unes des opinions soutenues par M. Coste.

« Je viens aujourd'hui à mon tour, dit M. Martin Saint-Ange, non pas réclamer une priorité, mais offrir à l'Académie, dans l'intérêt de la science, les résultats de mes expériences, les pièces anatomiques et les des-

sins qui infirment les *vues trop générales* émises par MM. Coste et Lesauvage, et qui *tendent* plutôt à rétablir ce qui est déjà admis.

» Il y a plus de dix ans que je m'occupe de l'anatomie pathologique de l'œuf humain, et les faits nombreux que j'ai observés, quoique insuffisants encore pour arriver à quelque chose de positif, rendent bien compte cependant de la grande divergence d'opinion qui existe parmi les anatomistes et les physiologistes qui se sont occupés de décrire la membrane caduque. Il y a du vrai dans presque tout ce que les auteurs ont dit; mais tous n'ont pas, suivant moi, assez observé surtout les faits d'anatomie pathologique, qui sont le véritable flambeau de l'anatomie physiologique. Aussi a-t-on souvent été induit en erreur, en prenant l'exception ou l'état maladif pour la règle ou l'état normal. »

(Renvoi à la Commission précédemment nommée.)

M. Marc d'Espine, qui avait présenté au concours pour les prix de Médecine et de Chirurgie, un Mémoire ayant pour titre : *Recherches étiologiques sur la mort et les maladies mortelles*, écrit que la première Commission à laquelle ce Mémoire a été soumis l'a renvoyé au concours de Statistique, et qu'à ce dernier concours il n'a pas été admis, comme ne satisfaisant pas à une des conditions du programme, celle de se rapporter particulièrement à des faits recueillis en France. M. Marc d'Espine demande aujourd'hui que son travail soit soumis au jugement d'une Commission ordinaire.

(Renvoi à la Section de Médecine et de Chirurgie.)

M. Vallée adresse une Note additionnelle à son Mémoire sur la *cause des sèches du lac de Genève.*

Le Bureau de l'Association des savants Italiens annonce, par une circulaire, que la quatrième réunion aura lieu à Padoue, à dater du 15 septembre prochain, et qu'elle se prolongera jusqu'au 26 du même mois.

M. Fonvielle adresse le résumé d'une conversation qu'il a eue avec un des Commissaires chargés de l'examen de son Mémoire concernant la proposition d'établir un *nouveau système métrique.*

M. Liouville, le Commissaire désigné dans la Note de M. Fonvielle, an-

nonce à cette occasion que le Mémoire soumis à l'examen de la Commission dont il fait partie n'est pas de nature à devenir l'objet d'un Rapport.

M. le Secrétaire perpétuel présente l'analyse manuscrite des nombreux travaux astronomiques de M. Gruthuisen. Cette analyse a été rédigée par le savant bavarois lui-même.

M. Guernier écrit relativement à une Note qu'il avait adressée à l'Administration sur des moyens supposés propres à *diminuer les dangers des chemins de fer*. Cette Note n'a pas été, comme semble le croire l'auteur, renvoyée à l'examen de l'Académie.

M. Buisson, qui a adressé, à plusieurs reprises, diverses Notes sur un mode de traitement qu'il croit pouvoir être employé avec succès contre l'*hydrophobie*, prie l'Académie d'intervenir auprès de la Commission à l'examen de laquelle ces Notes ont été renvoyées, à l'effet d'obtenir que cette Commission en fasse l'objet d'un Rapport.

L'Académie accepte le dépôt d'un *paquet cacheté* présenté par M. de Jouffroy.

La séance est levée à cinq heures. A.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

L'Académie a reçu, dans cette séance, les ouvrages dont voici les titres :

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie royale des Sciences; 2ᵉ semestre 1842, n° 5, in-4°.

Précis d'Anatomie transcendante appliquée à la Physiologie; par M. SERRES; tome Iᵉʳ (Principes d'Organogénie); in-8°.

Annales maritimes et coloniales; juillet 1842; in-8°.

Manuel du Cours de chimie organique professé au Conservatoire royal des Arts et Métiers, par M. PAYEN; *rédigé et annoté par* MM. ROSSIGNON *et* GARNIER; 2 vol. in-8°; 1842.

Mémoire sur le terrain crétacé de l'Aube; par M. LEYMERIE. (Extrait *des Mémoires de la Société géologique*, tomes IV et V); in-4°.

Traité complet de l'anatomie des Animaux domestiques; par M. RIGOT; 3ᵉ part. (*Myologie*); 3ᵉ livraison, in-8°.

Relation historique de la Méningite cérébro-spinale qui a régné épidémiquement à Aigues-Mortes, du 29 décembre 1841 au 4 mars 1842; par M. le docteur SCHILIZZI; Montpellier, 1842; in-8°.

Histoire naturelle générale et particulière des Insectes névroptères; par M. PÉCLET; première Monographie, famille des Perlides; 8ᵉ livraison, in-8°.

Collection des Tables pour abréger les calculs relatifs à la rédaction des projets de routes et de chemins de toute largeur; par M. LÉON LALANNE; 1842, in-4°.

Instruction pratique pour l'usage de l'Arithmoplanimètre; par le même; in-8°.

Essai sur le Feu grégeois; par M. LUDOVIC LALANNE; in-4°.

Des Pertes séminales involontaires; par M. LALLEMAND; tome III, 1ʳᵉ partie, in-8°.

Annales de la Société royale d'Horticulture de Paris; juillet 1842; in-8°.

Journal de Chimie médicale, de Pharmacie et de Toxicologie; août 1842; in-8°.

Le Mémorial, Revue encyclopédique; juin 1842; in-8°.

Revue zoologique; n° 7; in-8°.

Journal des Haras; août 1842; in-8°.

Observations astronomiques faites à l'Observatoire de l'Université impériale de Kasan; par MM. SIMONOFF *et* LEPOUNOFF; Kasan, 1842, in-4°.

Philosophical... *Transactions philosophiques de la Société royale de Londres, pour l'année* 1842; 1ʳᵉ partie; in-4°.

The Transactions... *Transactions de la Société Linnéenne de Londres*; vol. XIX, 1re part., in-4°.

Liste of... *Liste de MM. les membres composant la Société Linnéenne de Londres*; in-4°.

Proceedings of... *Procès-verbaux de la Société royale de Londres*; n°s 53 et 54; in-8°.

Royal Society. — Proceedings of... *Actes du Comité physique* (y compris la *Météorologie*) *de la Société royale de Londres*; n° 3, in-8°.

Mode of... *Moyen de prévenir les effets des collisions sur les chemins de fer, précédé d'une enquête sur les causes de l'accident de Brighton; par* M. J. POWER. (Extrait des *Transactions de la Société philosophique de Cambridge*; vol. VII, 3e part.) Cambridge, 1842, in-4°.

On Fibre... *Sur la Fibre; par* M. BARRY. (Extrait des *Transactions philosophiques pour l'année* 1842, part. 1re.) Avec planch.; in-4°.

The Quarterley Review; n° 139; juin 1842; in-8°.

The London... *Journal et Magasin philosophique de Londres, d'Edimbourg et de Dublin*; n°s 133-135, juin, juillet et supplément de juillet 1842; in-8°.

The Athæneum journal; mai et juin 1842; in-4°.

Risultamenti... *Résultats cliniques obtenus dans la salle orthopédique de l'hôpital de Notre-Dame de Lorette, à Naples; par* M. L. BRUNI. Naples, 1841, in-4°.

Articolo... *Article analytique sur l'addition à la Collection des Œuvres du professeur* L. GALVANI (Extrait du *Journal des Sciences et Lettres de Modène pour l'année* 1842); *par* M. GRIMELLI; in-8°.

Il Filocamo... *Journal médico-scientifique et d'éducation*; tome II, n° 10, in-4°.

Gazette médicale de Paris; n° 32.

Gazette des Hôpitaux; n°s 92 à 94.

L'Expérience; n° 266.

L'Écho du Monde savant; n°s 9 et 10.

L'Examinateur médical; n° 3.

OBSERVATIONS MÉTÉOROLOGIQUES. — JUILLET 1842.

Jours du mois	9 HEURES DU MATIN.			MIDI.			3 HEURES DU SOIR.			9 HEURES DU SOIR.			THERMOMÈTRE.		ÉTAT du ciel à midi.	VENTS à midi.
	Barom. à 0°.	Therm. extér.	Hygrom.	Barom. à 0°.	Therm. extér.	Hygrom.	Barom. à 0°.	Therm. extér.	Hygrom.	Barom. à 0°.	Therm. extér.	Hygrom.	Maxim.	Minim.		
1	752,44	+19,7		754,47	+21,8		755,46	+21,6		756,36	+17,2		+23,0	+18,0	Très-nuageux ⊙........	O. fort.
2	755,69	+18,0		755,55	+21,2		755,51	+19,8		756,60	+15,3		+22,0	+13,9	Très-nuageux ⊙........	O.
3	758,18	+16,9		757,65	+21,7		757,11	+21,8		755,93	+17,8		+23,3	+11,0	Très-nuageux ⊙........	O.
4	753,67	+25,0		752,04	+28,5		750,37	+30,8		749,86	+24,9		+33,0	+13,0	Beau.................	O.
5	753,49	+23,8		753,59	+20,4		754,59	+22,8		756,53	+17,0		+25,5	+18,0	Pluie.................	S. O. fort.
6	760,80	+17,2		760,68	+20,0		762,30	+18,0		763,20	+13,9		+21,6	+12,0	Très-nuageux ⊙........	O.
7	761,64	+19,0		760,12	+23,0		758,72	+23,6		756,76	+18,6		+24,8	+10,0	Couvert, quelq. éclaircies.	S.
8	754,50	+18,5		753,90	+21,8		752,96	+23,0		752,84	+16,3		+23,9	+13,5	Couvert, quelq. éclaircies.	S.
9	753,50	+18,9		753,89	+21,2		753,67	+23,0		753,76	+18,1		+24,0	+13,3	Couvert, quelq. élaircies.	O. fort.
10	756,93	+18,7		756,55	+21,4		755,70	+23,2		755,02	+19,5		+24,8	+14,5	Beau, quelques nuages....	S. O.
11	750,80	+26,0		749,61	+29,5		749,01	+28,4		749,61	+22,1		+32,9	+15,9	Nuageux et vaporeux	S. S. O.
12	754,00	+19,0		755,73	+21,0		756,95	+21,3		760,38	+16,0		+22,9	+17,9	Très-nuageux ⊙........	O.
13	764,10	+19,0		763,92	+22,4		764,06	+24,0		765,36	+20,1		+25,2	+11,2	Très-nuageux ⊙........	N. O.
14	766,58	+21,0		766,05	+23,0		765,67	+24,8		765,70	+20,1		+26,0	+15,3	Très-nuageux ⊙........	N. O.
15	764,62	+21,4		763,44	+23,8		762,20	+25,4		761,11	+19,9		+26,5	+13,2	Beau.................	N. E.
16	758,59	+22,3		757,30	+25,1		756,00	+27,0		754,80	+21,9		+29,0	+14,3	Beau.................	E. S. E.
17	753,07	+23,4		751,48	+28,7		750,49	+30,8		750,86	+23,8		+33,0	+14,8	Beau.................	E.
18	753,97	+22,4		753,75	+26,8		753,76	+27,2		753,41	+22,8		+29,0	+17,0	Couvert..............	N.
19	753,37	+26,4		753,07	+27,2		751,50	+28,2		752,03	+20,4		+28,8	+18,4	Couvert..............	S. O.
20	752,26	+19,8		751,74	+22,2		751,13	+21,5		750,84	+17,5		+23,3	+13,3	Couvert, quelq. éclaircies.	S. S. E.
21	750,58	+17,5		750,43	+19,7		750,38	+19,6		752,77	+15,6		+21,2	+13,8	Très-nuageux ⊙........	S. O.
22	755,60	+18,1		756,36	+18,8		756,73	+20,0		758,87	+16,0		+21,4	+12,8	Couvert, quelq. éclaircies.	N. O.
23	761,07	+15,8		761,05	+18,4		760,30	+20,4		760,43	+16,6		+20,6	+10,8	Couvert, quelq. éclaircies.	N. E.
24	759,32	+19,4		758,18	+22,2		756,72	+23,2		755,40	+18,6		+24,9	+12,2	Beau, quelques nuages...	N. E.
25	752,61	+22,4		751,54	+25,2		750,63	+26,5		750,72	+19,9		+28,0	+13,2	Beau.................	N. N. E.
26	752,42	+17,8		753,17	+21,5		753,14	+22,4		756,51	+18,1		+23,2	+13,2	Couvert, quelq. éclaircies.	N. E.
27	759,62	+18,2		759,81	+20,6		759,70	+22,6		760,10	+18,8		+24,0	+12,3	Nuageux et vaporeux	N. N. E.
28	758,68	+22,5		756,96	+24,5		755,47	+25,6		753,76	+20,1		+28,8	+14,0	Nuageux et vaporeux....	N. N. E.
29	751,52	+20,6		751,13	+21,4		750,67	+21,2		752,97	+15,8		+21,8	+14,0	Couvert..............	O.
30	753,51	+14,2		756,76	+15,8		757,04	+17,1		758,40	+14,4		+19,1	+11,0	Couvert..............	N. N. O. fort.
31	758,84	+15,5		758,58	+17,8		758,64	+18,4		760,32	+15,0		+19,0	+10,3	Couvert..............	N.
1	756,08	+19,6		755,84	+22,1		755,64	+22,8		755,69	+17,9		+24,6	+13,7	... Moy. du 1er au 10	Pluie en centim.,
2	757,13	+22,1		756,61	+25,0		756,08	+25,9		756,41	+20,5		+27,7	+15,1	.. Moy. du 11 au 20	Cour. 1,527
3	755,77	+16,5		755,85	+20,5		755,40	+21,5		756,38	+17,1		+22,8	+12,4	... Moy. du 21 au 31	Terr.. 1,337
	756,33	+19,4		756,10	+22,5		755,70	+23,4		756,16	+18,5		+25,0	+13,7	.... Moyennes du mois....	+19,35